Aritmética Recreativa

Yakov Perelman

Traducción Patricio Barros

Capitulo Primero
Lo Antiguo y lo Nuevo Sobre Los Números y Las Numeraciones

Contenido:

1. La Numeraciones Escrita Mas Difundida

Parto de la base que a ninguno de ustedes, lectores de este libro, constituye un gran esfuerzo escribir cualquier número entero; por ejemplo, dentro de los límites de un millón. Para la escritura de los números, empleamos los diez bien conocidos signos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, llamados; cifras. Ahora nadie duda que, con la ayuda de estos diez signos (cifras) podemos escribir un número, ya sea muy grande o muy pequeño, entero o fraccionario.
Los números del uno al nueve, los escribimos con la ayuda de sólo una de las; nueve primeras cifras. Para la escritura de los números del diez al noventa y nueve, necesitamos ya de dos cifras, una de las cuales puede ser también el cero, y así sucesivamente.
Como base de la numeración tomamos el número "diez", por lo que nuestro sistema de numeración se llama decimal.
Es decir, que diez unidades simples (unidades de primer orden) forman una decena (una unidad de segundo orden), diez decenas forman una centena (una unidad de tercer orden), diez centenas forman un millar (una unidad de cuarto orden) y, en general, cada diez unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior.

En muchos pueblos los sistemas de numeración eran decimales. Eso está relacionado con el hecho de que tengamos diez dedos en nuestras manos.
En la escritura de los números, en el primer lugar de la derecha escribimos la cifra correspondiente a las unidades; en segundo lugar, la cifra de las decenas; luego la de las centenas, después la de los millares, etc. Así, por ejemplo, la escritura de 2716 denota que el número se compone de 2 millares, 7 centenas, 4 decenas y 6 unidades.
Si un número carece de unidades de determinado orden, en el lugar correspondiente escribimos un cero. Así, el número que tiene tres millares y cinco unidades, se escribe. 3005. En él no existen decenas ni centenas, es decir, las unidades de segundo * y tercer orden; por tal razón, en los lugares segundo y tercero de la derecha escribimos ceros.
¿Qué particularidad notable podemos encontrar en el sistema de numeración que siempre hemos usado?
En el caso, por ejemplo, del número 14742, usamos dos veces la cifra 4: en el segundo y en el cuarto lugar de la derecha. En tanto que una vez representa 4 decenas, la otra representa 1 millares. En consecuencia, resulta que una misma cifra puede denotar tanto cantidades de unidades, como cantidades de decenas, de centenas, de millares, etc. en función de la posición que ocupe la cifra en la escritura del número. De aquí precisamente que nuestro sistema de numeración se llame posicional.
Volvamos al número 2746, del cual hemos hablado antes. En él, la primera cifra de la derecha (la cifra 6) representa 6 unidades, la segunda cifra de la derecha (4) representa 4 decenas, es decir, el número

$$40 = 4 * 10,$$

la tercera cifra de la derecha (7) representa 7 centenas, o sea, el número

$$700 = 7 * 10 * 10 = 7 * 10^2,$$

y finalmente, la cuarta cifra (2) representa 2 millares, es decir, el número

$$2000 = 2 * 10 * 10 * 10 = 2 * 10^3$$

El mencionado número puede ser escrito, pues, así:

$$2746 = 2000 + 700 + 40 + 6 = 2 ** 10^3 + 7 * 10^2 + 4 * 10 + 6$$

Cada tres órdenes en un número constituyen una clase. Las clases se cuentan siempre de derecha a izquierda. Primero está la llamada primera clase, constituida por las unidades, decenas y centenas; después la segunda clase, con los millares, las decenas de millar y las centenas de millar: luego la tercera clase, constituida por los millones, las decenas de millón y las centenas de millón, etc.
Pensemos un poco en esta cuestión: ¿ Por qué se efectúan tan rápida y fácilmente con los números las cuatro operaciones aritméticas: adición, substracción, multiplicación y división?: Estas ventajas nos son ofrecidas, lógicamente, por el citado principio posicional de la escritura de los números.
En efecto, al hacer una operación aritmética cualquiera con números, trabajamos con las decenas, centenas, millares, etc., como si fueran unidades, y sólo al obtener el resultado final tenemos en cuenta su orden.

Así, para la escritura de los números, empleamos el sistema decimal posicional de numeración. El famoso físico y matemático francés Laplace (siglos XVIII-XIX), escribió acerca del sistema: "La idea de representar todos los números con diez signos, asignándoles además de un valor por su forma otro por su posición, es tan sencilla, que en virtud de esta sencillez resulta difícil imaginarse en qué medida es admirable esta idea".
Ahora casi toda la humanidad utiliza este sencillo sistema de numeración, cuyo principio de construcción y trazo de cifras aparecen con idénticas propiedades pana tolo mundo.
¿Cómo surgió este extraordinario sistema de numeración decimal posicional?
No obstante su sencillez, los hombres necesitaron varios miles de años para llegar a él. No será una exageración si decimos que todos los pueblos del mundo tomaron parte en la creación de dicho sistema.
Inicialmente el sistema decimal posicional de numeración apareció en la India, y ya a mediados del siglo VIII, se usaba ahí ampliamente. Por esa misma época, también surge en China y otros países del Oriente. Los europeos adoptaron este sistema hindú de numeración en el siglo XIII, debido a la influencia árabe. De aquí surgió, precisamente, la denominación, históricamente incorrecta, de "numeración arábiga".
¿Qué sistemas de numeración estaban en uso, antes del surgimiento del decimal posicional?
El enorme interés de esta pregunta, hace necesario un análisis detallado de ella, lo que nos proporcionará la posibilidad de valorar mejor la, ventajas de nuestro sistema de numeración.
Volver

2. Numeración Antigua Egipcia

Una de las más antiguas numeraciones es la egipcia. Data aproximadamente de hace 7000 años, es decir, de más de 3000 años antes de nuestra era. En el transcurso de los tres primeros milenios sufrió cambios insignificantes. Relacionémonos más de cerca con dicha numeración antigua, y fijemos nuestra atención en la forma en que se representaban en ella los signos numéricos, y cómo, con ayuda de ellos, se escribían los números.
En la numeración egipcia existían signos especiales (jeroglíficos) para los números: uno, diez, cien, mil, diez mil, cien mil, un millón. Estos signos están representados en la figura 1.

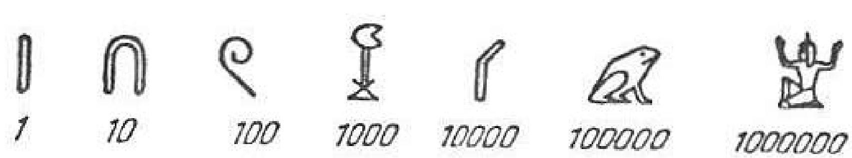


Figura 1. Estos signos especiales (jeroglíficos) eran utilizados por los antiguos egipcios para la notación de los números.

Para representar, por ejemplo, el número entero 23 1415, era suficiente escribir en serie dos jeroglíficos de diez mil luego tres jeroglíficos de mil, uno de cien, cuatro de diez y cinco jeroglíficos para las unidades (ver. fig. 2).

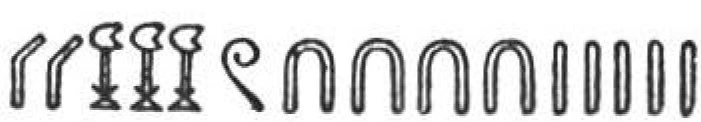


Figura 2. Escritura del número 23 145 en el sistema de numeración egipcio.

Estos símbolos, en la escritura, no podían aparecer más de nueve veces en cada número. En el sistema egipcio de numeración no había signo alguno para el cero.
Este solo ejemplo es suficiente para aprender a escribir los números tal y como los representaban los antiguos egipcios. Este sistema de numeración es muy simple y primitivo. Es un sistema decimal puro, puesto que en la representación de los números enteros se emplea el principio decimal conforme al orden clase. Hay que notar que cada signo numérico representa solamente un número. Así, por ejemplo, el signo para las decenas (ver fig. 1) denota solamente diez unidades. Y no diez decenas o diez centenas, lo que pone en evidencia el por qué el sistema de numeración egipcio no era posiciones.
Volver

3. Numeración Antigua Rusa

Conforme al principio de la numeración egipcia antigua, se construyeron sistemas de numeración en algunos pueblos más, tales como el de la antigua Grecia por ejemplo, del que hablaremos detalladamente más adelante.
En la antigua Rusia, por ejemplo, existió un sistema popular de numeración ampliamente difundido, y elaborado sobre el mismo principio del sistema egipcio, pero distinguiéndose de éste por la representación de los signos numéricos.
Es interesante anotar, que esta numeración era, en la antigua Rusia, inclusive de índole legal: precisamente conforme a tal sistema, sólo que más desarrollado, los recaudadores de impuestos debían llevar los registros en el libro de contribuciones.
El recaudador, leemos en el antiguo "Código de las Leyes", recibiendo de cualquiera de los arrendadores o propietarios el dinero aportado, deberá él mismo, o por medio de un escribiente, registrar en el libro de contribuciones frente al nombre del arrendador, la cantidad de dinero recaudado, anotando la suma recibida con cifras o signos. Para conocimiento de todos y de cada cual, estos signos se instituyen idénticos para todo lugar, a saber:

diez rublos se denota por el signo	(
un rublo	O
diez kopeks	x
un kopek	|
un cuarto	-

Por ejemplo, veintiocho rublos, cincuenta y siete kopeks y tres cuartos:

((OOOOOOOOxxxxx|||||||---

En otro lugar del mismo tomo del "Código de las Leyes", nos volvemos a encontrar con una mención acercan del empleo obligatorio de las notaciones numéricas nacionales. Se dan signos especiales para los millares de rublos, en forma de una estrella de seis puntas con una cruz en su centro, y para las centenas, en forma de una rueda con ocho rayos. Pero las notaciones para los rublos y las decenas de kopeks aquí se establecen en distinta forma que en la ley anterior. Veamos el texto de la ley acerca de los así llamados "signos tributarios"
Que en todo recibo entregado al Representante de la Alta Estirpe, además de la redacción con palabras se escriba, con signos especiales, los rublos y kopeks aportados, de tal manera que al

realizar un simple cálculo de todos los números, pueda ser aseverada la veracidad de las declaraciones[1]. Los signos empleados en el recibo significan:

una estrella	mil rublos
una rueda	cien rublos
diez rublos	.
X	un rublo,
|||||||||	diez kopeks
|	un kopek.

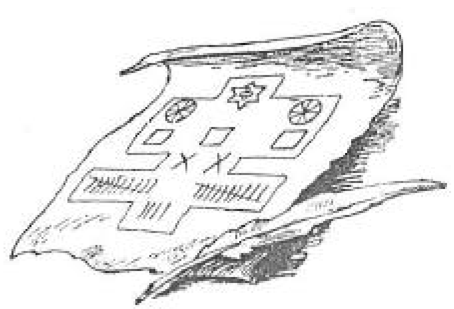


Figura 3. Inscripción antigua en un recites de pago de impuesto ("tributo"), que representa la suma 1232 rublos, 24 kopeks.

Para que no puedan hacerse aquí adiciones de ningún tipo, todos los signos se rodean por medio de un trazo constituido por líneas rectas.
Por ejemplo, mil doscientos treinta y dos rublos; veinticuatro kopeks se representan así (Ver fig. 3).
Volver

4. Numeración Romana
De todas las numeraciones antiguas, la romana es, posiblemente la única que se ha conservado hasta hoy, y que es empleada con frecuencia. Las cifras romanas se utilizan hoy día para las notaciones de los siglos, las numeraciones de los capítulos en los libros, etc.
Para la escritura de los números enteros en la numeración romana, es necesario recordar las representaciones de los siete números fundamentales:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Con su ayuda, podemos escribir todo número entero menor que 4000, y algunas de las cifras (I, X, C, M) pueden repetirse consecutivamente hasta tres veces.
En la escritura de los números en el sistema romano de numeración, una cifra menor puede estar a la derecha de una mayor; en este caso, la menor se adiciona a la mayor. Por ejemplo, el número 283 lo podernos escribir, en signos romanos así:

CCLXXXIII

[1] Esto muestra que los signos escritos tenían una amplia utilización entre el pueblo.

es decir, 200 + 50 + 30 + 3 = 283. Aquí, la cifra que representa a la centena aparece dos veces, y las que representan respectivamente a las decenas y a las unidades aparecen tres veces.

Una cifra menor, también puede escribirse a la izquierda de una mayor, con lo que aquella se substrae de ésta. En este caso no se admite la repetición de la cifra menor. Los ejemplos que se proporcionan enseguida ayudan a aclarar completamente el método de escritura de los números en la numeración romana.

Escribamos en romanos los números 94, 944, 1809, 1959:

XCIV	= 100 - 10 + 5 - 1	= 94
CMXLIV	= 1000 - 100 + 50 - 10 + 5 - 1	= 944
MDCCCIX	= 1000 + 500 + 300 + 10 - 1	= 1809
MCMLIX	= 1000 + 1000 - 100 + 50 + 10 - 1	= 1959

¿Se ha observado que en este sistema no existe signo para representar el cero? En la escritura del número 1809, por ejemplo, no usamos el cero.

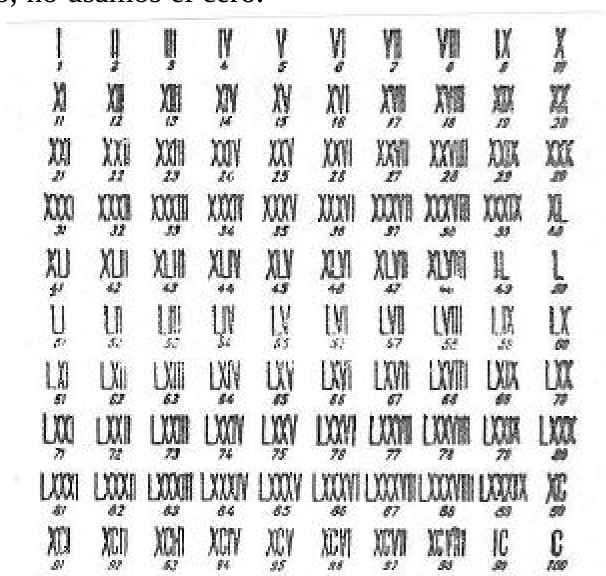


Figura 4.- Así se escriben en la numeración romana todos y cada uno de los números romanos del uno al cien.

Estudien ustedes la figura 4, donde proporcionamos la escritura en la numeración romana de todos los números enteros del 1 al 100.

Con la ayuda de las cifras romanas se pueden escribir también grandes números para lo cual, después de la escritura del signo de millares se introduce la letra latina *M* como subíndice. Escribamos, como ejemplo, el número 417.986:

CDXVIIM CMLXXXVI

El sistema romano de numeración, como el antiguo egipcio, no es posiciones: cada cifra en él representa sólo un número estrictamente definido. Sin embargo, a diferencia del antiguo egipcio, no es decimal puro. La presencia en el sistema romano de signos especiales para los números cinco, cincuenta, y quinientos, muestran que en él existen fuertes vestigios de un sistema de numeración quinario.

La numeración romana no está adaptada, en modo alguno, para la realización de operaciones aritméticas en forma escrita. Esta es su desventaja mayor.
Volver

5. Numeración Antigua Griega

Continuemos nuestro relato acerca de los sistemas no posicionales[2] de numeración, y al final del capítulo describiremos detalladamente uno de los más antiguos sistemas de numeración (aunque por supuesto, posterior al egipcio): el babilónico, que fue el primer sistema posicional.

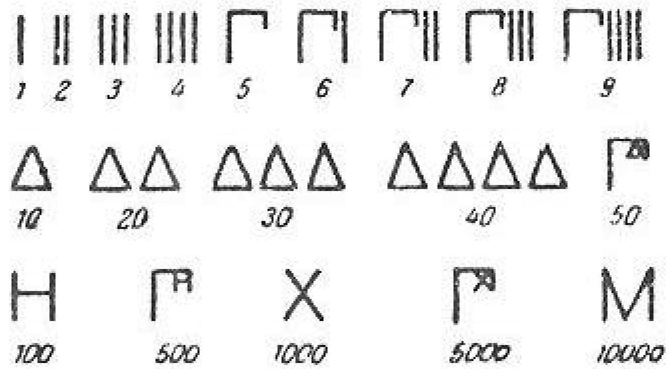
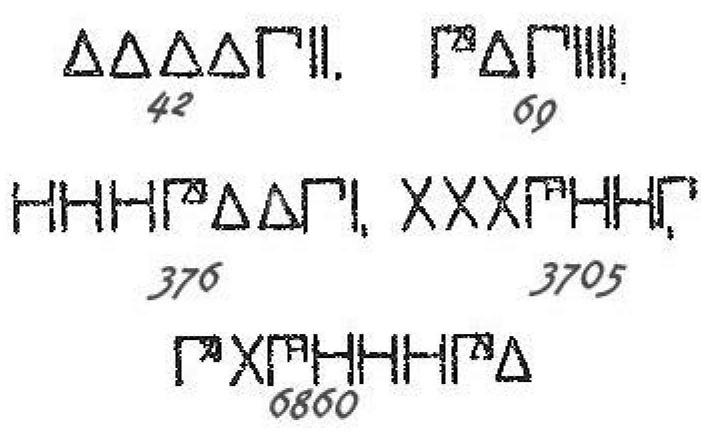


Figura 5. Escritura de algunos números en la numeración ática o herodiánica.

Un sistema muy parecido al romano es el llamado ático o herodiánico[3], que se utilizó en la Grecia antigua. En la figura 5 se muestran las representaciones de varios números de esta numeración. A diferencia de la numeración romana este dibujo muestra que aquí, los signos parar los números uno, diez, cien y mil, pueden repetirse no tres, sino cuatro veces, en cambio, se prohíbe escribir una cifra menor la izquierda de una mayor.

En la figura 6 se dan ejemplos de la escritura de números enteros en el sistema ático de numeración, que, aclaran completamente el método de tal escritura.



[2] En general, a los sistemas de numeración no decimales. Le dedicamos más adelante un capítulo entero (Ver Cap. IV).

[3] Herodiano era un Historiador griego de los siglo II-III de N. E. En sus obras científicas fue donde primero se mencionó la numeración ática. Las más antigua de las escrituras se encontrarán con respecto a esta numeración, corresponde al siglo VI antes de nuestra era.

Figura 6. Ejemplos que aclaran el método de escritura de los números enteros en el sistema ático de numeración.

Durante el siglo III A. de N. E., en Grecia, en lugar de la numeración ática se utilizaba la numeración jónica, donde números enteros se representaban con letras del alfabeto griego sobrerrayadas; sistema de numeración denominado alfabético.

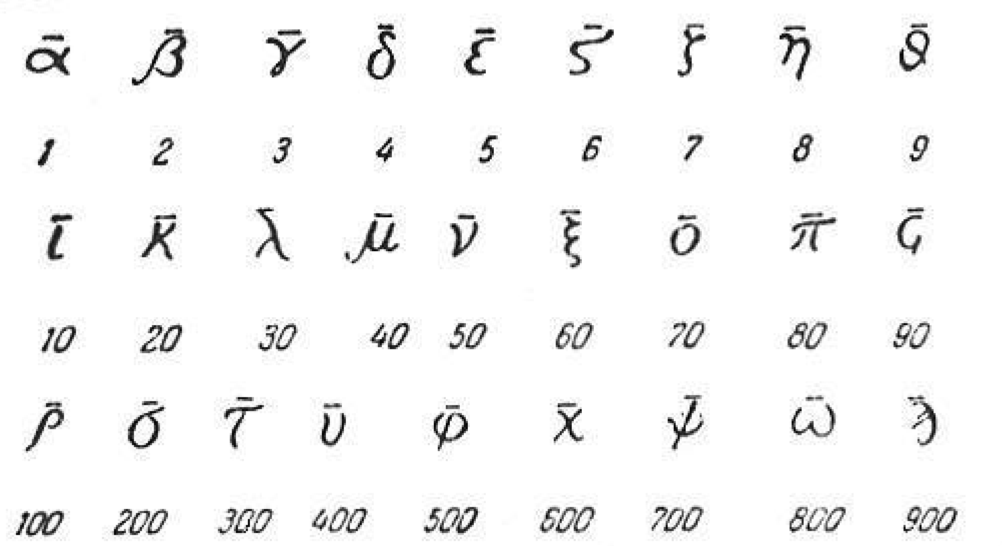


Figura 7.

Como se ve, este sistema es decimal, pero no posicional.

Esto también sucede en otras numeraciones alfabéticas.

Volver

6. Numeración Eslava

Los pueblos eslavos también utilizaron una numeración alfabética. En la figura 8 están representadas las 27 letras del alfabeto eslavo. Bajo cada letra está escrito su nombre y el valor numérico que le corresponde. Sobre la letra que representa al número hay un signo (ver fig. 8) llamado "titlo".

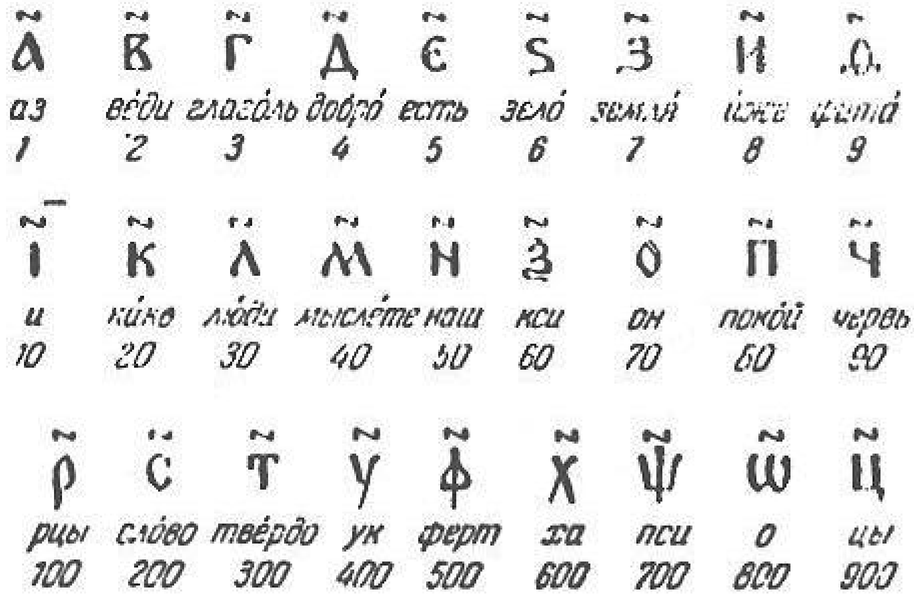


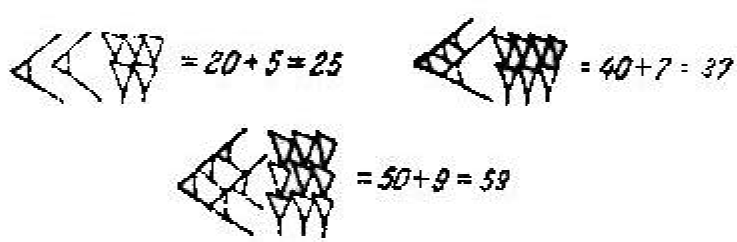
Figura 8. Notación de los números en la numeración alfabética eslava. Los nombres de las letras, que en el dibujo están escritas en ruso, se traducen como sigue, en su orden correspondiente: az vedi glagol dobró est zeló zenilia izhe fitá i kako lyudi mislietie nash ksi on pokoy cherv rtsi slevo tvierbo uk fert ja psi o tsy.

Volver

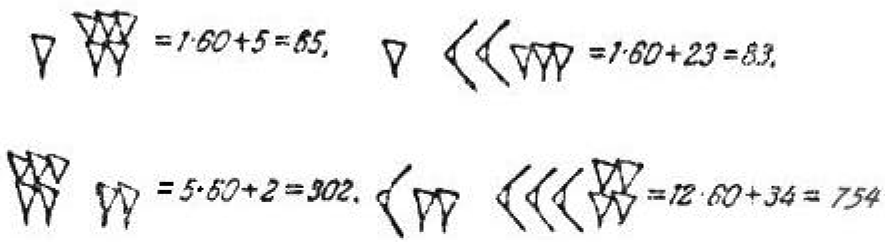
7. Numeración Babilónica

El más interesante de todos los antiguos sistemas de numeración es el babilónico, que surgió aproximadamente en el año 2000 A. de N.E. Fue el primer sistema posicional de numeración, conocido por nosotros. Los números en el sistema se representaban con la ayuda de sólo dos símbolos, una cuña vertical V que representaba a la unidad y una cuña horizontal para el número diez. Estas cuñas resaltaban en las tablillas de las cuñas de arcilla, por los palitos inclinados, y tomaban la forma de un prisma. De aquí surgió la denominación de cuneiforme para la escritura de los antiguos babilonios.

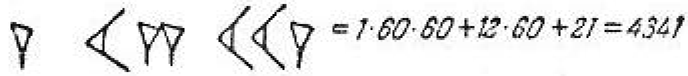
Con la ayuda de los dos signos mencionados, todos los, números enteros del 1 al 59 conforme a un sistema decimal se podían escribir exactamente como en la numeración egipcia: es decir, que los signos para el diez y la unidad repetían, correspondientemente tantas veces como en el número hubiese decenas y unidades. Proporcionemos algunos ejemplos explicativos:



Hasta el momento no hemos encontrado nada nuevo. Lo nuevo empieza con la escritura del número 60 donde se utiliza el mismo signo que para el 1, pero con un mayor intervalo entre él y los signos restantes. Proporcionemos también, aquí, ejemplos aclaratorios:



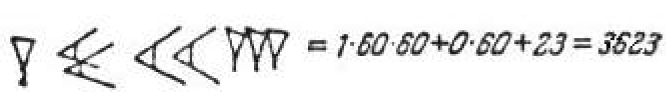
De esta manera, ya podemos representar los números del 1 al 59 * 60 + 59 = 3599.
Enseguida está una unidad de un nuevo orden (es decir el número 1 * 60 * 60 = 3600), que también se representa por el signo para la unidad; por ejemplo:



De esta manera, la unidad de segundo orden representada por el mismo signo es 60 veces mayor que la de primer orden, y la unidad de tercer orden es 60 veces mayor que la de segundo y 3600 veces mayor (60 * 60 = 3600) que la unidad de primer orden. Y así sucesivamente.
¿Pero qué sucede si uno de los órdenes intermedios no existe?, preguntarán ustedes. ¿Cómo se escribe, por ejemplo, el número 1 * 60 * 60 + 23 = 3623? Si se escribiera simplemente en esta forma:

Podría confundírsele con el número 1 * 60 + 23 = 83. Para evitar confusiones se introdujo, posteriormente, el signo separador, que jugaba el mismo papel que el signo "cero"

juega en nuestra numeración. Así pues, con la ayuda de dicho signo separador, el número 3623 se escribirá así:



El signo separador babilonio nunca se colocaba al final de un número; por tal razón, los números 3; 3 * 60 = 180: 3 * 60 * 60 = 10800; etc., se representaban en forma idéntica. Se convenía en determinar conforme al sentido del texto, a cuál de estos números se refería lo expuesto.

Es notable el que, en la matemática babilónica, se empleara un mismo signo, tanto para la escritura de los números enteros, como para la el de las fracciones. Por ejemplo, las tres cuñas verticales escritas en fila, podían denotar 3/60, ó 3/60*60 = 3/3.600, ó 3/60*60*60 = 3/216.000
¿ Cuáles son las conclusiones que podemos sacar, ahora, sobre las particularidades de la numeración babilónica?
En primer lugar, observamos que este sistema de numeración es posicional. Así, un mismo signo puede representar en él, tanto 1 como 1 * 60, como 1*60*60 = 1 * 60^2 = 1 * 3600, etc., en función del lugar en que dicho signo esté escrito. Exactamente como en nuestro sistema de numeración, una cifra, por ejemplo, 2, puede representar los números: 2, ó 2 * 10 = 20, ó 2 * 10 * 10 = 2 X 10^2 = 2 * 100 = 200, etc., según si está en el primero, segundo, tercero, etc, orden.
Sin embargo, el principio posicional, en la numeración babilónica, se lleva a cabo en órdenes sexagesimales. Por tal motivo, dicha numeración se llama sistema de numeración posicional sexagesimal. Los números hasta el 60 se escribían, en esto sistema, conforme al principio decimal
En segundo lugar la numeración babilónica permitía una escritura sencilla de las fracciones sexagesimales, es decir, las fracciones con denominadores 60, 60 * 60 = 3600, 60 * 60 * 60 = 216 000, etc.
Las fracciones sexagesimales se utilizaron mucho en la época de los babilonios. Pero aún hoy dividimos 1 hora en 60 minutos, y 1 minuto en 60 segundos. Exactamente igual, dividimos la circunferencia en 360 partes, llamadas grados, un grado lo dividimos en 60 minutos, en tanto que un minuto en 60 segundos.
Como se ve, el sistema de numeración hindú, ampliamente usado por nosotros, está lejos de ser el único método de notación de los números.
Han existido también, otros procedimientos de representación de los números; así, por ejemplo, algunos comerciantes tenían sus signos secretos para las notaciones numéricas: las llamada, "claves" comerciales. Sobre ellas hablaremos ahora detenidamente.
Volver

8. "CLAVES" SECRETAS COMERCIALES

En tiempos pre-revolucionarios, en las cosas compradas en los comercios ambulantes o en las tiendas particulares[4], especialmente de provincia, se veían frecuentemente unas letras indescifrables, por ejemplo,

a ve v uo.

Se trata simplemente de dos claves: una es del precio de venta que tiene la mercancía, y la otra es del costo que tuvo la misma para el comerciante. Así, éste puede calcular cuánto rebajarla en caso de que el cliente le pidiese descuento.

[4] Aunque esta costumbre ha desaparecido -por innecesaria- en la URSS y otros países, sigue siendo muy usual entre los pueblos de sistema capitalista. (N. del Editor)

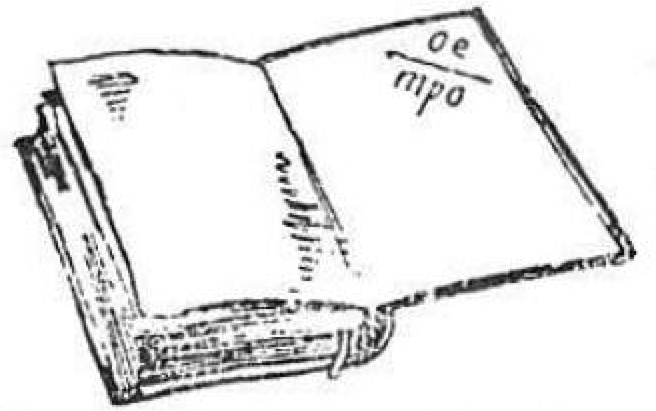


Figura 9. "Clave" comercial en la cubierta de un libro (en ella se representa con las letras superiores, el valor intrínseco, o costo, del libro, y con las letras inferiores el precio de renta).

El sistema de notaciones era muy sencillo. El vendedor escogía cualquier palabra de diez diferentes letras: por ejemplo la palabra "feudalismo". La primera letra de la palabra representaba al uno, la segunda, 2 la tercera, 3, y así sucesivamente hasta la última letra, que representaba al cero. Con la ayuda de estas letras-cifras condicionales el comerciante anotaba sobre las mercancías, su precio, guardando en estricto secreto "la clave" de su sistema de ganancias.
Si por ejemplo, era escogida la palabra:

f	e	u	d	a	l	i	s	m	o
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

el precio 4 rublos, 75 kopeks, se escribía **d ia**
Algunas veces, sobre la mercancía se escribía el precio en forma de quebrado (fig. 9), por ejemplo, en un libro se encontraba la notación

ao / f en

eso significaba, en la clave "f e u d a l i s m o" que era necesario pedir un rublo 25 kopeks, si el mismo libro valía 50 kopeks.

9. Peones en Lugar de Números
Solamente después de lo indicado, es fácil comprender que los números se pueden representar no solamente con ayuda de cifras, sino también con cualesquiera otros signos y aún objetos: lápices, pluma, reglas, gomas, etc. Basta con atribuir a cada objeto el valor de una cifra cualquier determinada. Se puede inclusive, por curiosidad, con ayuda de tales cifras objetos, representar las operaciones con los números: sumar, restar, multiplicar, dividir.

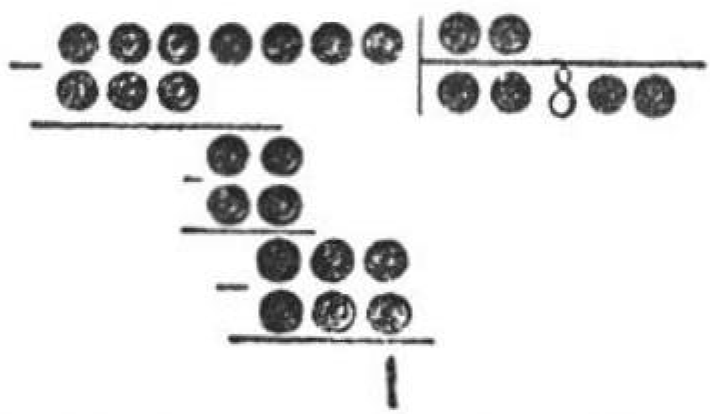


Figura 10. Representación del problema publicado por una revista de ajedrez, donde casi todas las cifras están substituidas por peones.

En una revista de ajedrez fue presentado un problema: determinar el verdadero significado del ejemplo de división de números, representado en la fig. 10, en el cual casi toda, las cifras están substituidas por peones. De 28 cifras, sólo 2 son conocidas: el 8 en el cociente y, el 1 en el residuo. Los otros 26 signos son peones de ajedrez, por lo que probablemente parecerá que el problema no tiene sentido. Sin embargo ahora veremos una manera de solucionar el problema, basándonos en el proceso de la división.

La segunda cifra del cociente es, naturalmente; cero, ya que al residuos de la primera resta le añadimos no una cifra sino dos. De la misma manera, después de que añadamos la primera cifra, formamos un número menor que el divisor; también en tales casos la cifra siguiente del cociente es cero.

Exactamente por lo mismo; razonamientos, establece que la cuarta cifra del cociente es, también cero.

Fijando la atención en la disposición de los peones, observamos que el divisor de dos cifras, al ser multiplicado por 8 da un número de dos cifras; al multiplicarlo por la primera cifra (aún desconocida) del cociente, se obtiene un número de tres cifras. Es decir, esta primera cifra del conciente es mayor que 8; tal cifra puede ser, solamente, el 9.

Por el mismo método, establecemos que también la última cifra del cociente es 9.

Ahora, el cociente está completo; es: 90 809. Obtengamos hora el divisor. Como se ve en la figura 10, consta de dos cifras; además, la disposición de los peones indica que este número de dos cifras, al multiplicarse por 8, da un número de dos cifras; el resultado de multiplicarlo por nueve, consiste en un número de tres cifras. ¿Cuál es este número? Realicemos, las pruebas empezando con el menor número de dos cifras: el 10.

10 * 8 = 80.
10 * 9 = 90.

El número 10, como vemos, no satisface las condiciones requeridas: ambos productos son números de dos cifras. Probemos con el siguiente número de dos cifras, el 11:

11 * 8 = 88
11 * 9 = 99

El número 11 tampoco sirve, pues los dos productos tienen otra vez dos cifras. Probemos ahora con el 12:

12 * 8 = 96
12 * 9 = 108

El número 12 satisface todas las condiciones. Pero, ¿no habrá otros números que también las satisfagan? Probemos con el 13:

13 * 8 = 104
13 * 9 = 117

Ambos productos son números de tres cifras, por lo que el 13 no sirve. Está claro que tampoco servirán todos los números mayores que 13.
Así, el único divisor posible es el 12. Conociendo el divisor, el cociente y el residuo, fácilmente podemos encontrar el dividendo, invirtiendo el proceso de la división.
Así, dividendo

90 809 * 12 + 1 = 1 089 709

Finalmente tenemos, por consiguiente, el ejemplo dado de división con residuo:

```
 1  0  8  9  7  0  9 /1  2
-1  0  8                9  0  8  0  9
          9  7
       -  9  6
             1  0  9
          -  1  0  8
                   1
```

Como vemos, con dos cifras conocidas hemos, pedido encontrar el valor de 26 cifras desconocidas.
Volver

10. La Aritmética en el Desayuno

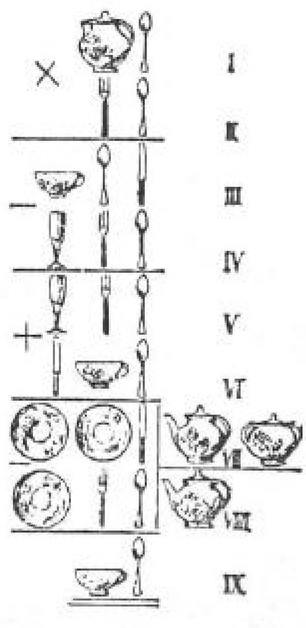


Figura 11 ¿A qué números corresponden estos símbolos aritméticos?

Ante nosotros hay una serie de operaciones con números, representados por los objetos de servicio de una mesa (fig. 11): El tenedor, la cuchara, el cuchillo, la jarra, la tetera, el plato; todos éstos son signos, cada uno de los cuales substituye a una cifra determinada.

Observando este grupo de cuchillos, tenedores, vajilla, etc., cabe preguntar: ¿Cuáles son, precisamente, los números representados aquí?

A primera vista, el problema parece ser muy difícil: como si se tratara de descifrar jeroglíficos, tal y como lo hizo hace algún tiempo Champolion[5]. Pero este problema es mucho más sencillo: ustedes saben que los números, aunque aquí están representados por cuchillos, cucharas, tenedores, etc, están escritos conforme al sistema decimal de numeración, es decir, que sabemos que el plato colocado en segundo lugar (leyendo desde la derecha), es una cifra de las decenas, así como el objeto que está a su derecha es una cifra de las unidades, y el que está a su izquierda es la cifra de las centenas. Además, ustedes saben que la disposición de todos estos objetos tiene un determinado sentido, el cual surge de la esencia de las operaciones aritméticas, realizadas con los números denotados por ellos. Todo esto, puede, en gran medida, facilitar a ustedes la resolución del problema presentado.

¿Con qué números se realizan las operaciones aritméticas, aquí indicadas?

Veamos cómo se pueden encontrar los valores de los objetos aquí dispuestos. Considerando los tres primeros renglones en nuestro dibujo, verán que cuchara, multiplicada por cuchara, da cuchillo; y de los renglones 3, 4 y 5, vemos que cuchillo menos cuchara da cuchara es decir, cuchara + cuchara = cuchillo. ¿Qué cifra da el mismo resultado al multiplicarse por sí misma que al duplicarse? Esta puede ser únicamente el 2, porque 2 * 2 = 2 + 2. Así, sabemos ya que cuchara = 2 y, por lo tanto, cuchillo = 4.

---

[5] Champolion (1790-1532). Famoso filólogo francés fundador de la egiptología o, ciencia que estudia el idioma la historia y la cultura del Egipto antiguo y de los países con frontera común con él.

Ahora, sigamos, adelante, ¿Qué cifra está representada por el tenedor? Lo averiguaremos por las primeras 3 líneas, conde el tenedor aparece multiplicando, y por los renglones III, IV y V, donde aparece el tenedor en la substracción. En el grupo de la substracción vemos que, en el orden de las decenas, al restar tenedor de cuchara, obtenemos tenedor, es decir, en la substracción 2 - tenedor, obtenemos tenedor. Esto puede ser en dos casos: o tenedor = 1, y por lo tanto, 2-1=1, o tenedor = 6, y entonces substrayendo 6 de 12 (una unidad de orden superior se representa por taza), obtenemos 6. ¿Cuál elegir: 1 ó 6?

Probemos el 6 para el tenedor en otras operaciones. Dirijamos la atención a la multiplicación de los números que se hallan en los renglones I y II. Si tenedor = 6, entonces en el segundo renglón está el número 62 (ya sabemos que cuchara = 2). No es difícil entender, que en tal caso, en el primer renglón deberá estar el número 12, y la jarra representará la cifra 1. En verdad, si la jarra denotara la cifra 2 o cualquier otra cifra mayor, el producto de los números de los renglones I y II sería un número de cuatro cifras, y no de tres, como debe ser. Así, si tenedor = 6, en el primer renglón está el número 12, y en el 11, el 62. Por lo tanto, su producto es 12 * 62 = 744.

Pero esto es imposible, porque la cifra de las decenas de este producto es cuchara, es decir, 2, y no 4 como habíamos obtenido. Esto quiere decir, que tenedor no es igual a 6 como se suponía, y por lo tanto es necesario considerarlo igual a uno.

Conociendo por tales, búsquedas, en verdad bastante largos, que el tenedor denota la cifra 1, en adelante ya iremos más rápida y certeramente. De la operación de la substracción, en los renglones III y IV, vemos que taza puede ser 6, o bien 8. Pero el 8 no puede ser, porque implicaría que la copa fuera 4, y sabemos que la cifra cuatro esta denotarla por el cuchillo. Así, la taza representa a la cifra 6 y, por lo tanto, la copa a la cifra 3.

¿Cuál es la cifra que está representada por la jarra en el renglón 1? Esto es fácil de saber, si nos es dado el producto (III renglón, 624) y uno de los factores (II renglón, 12). Dividiendo 624 entre 12, obtenemos 52. Por lo tanto, la jarra = 5.

El valor del plato se determina fácilmente: en el VII renglón, plato = tenedor + taza = copa + cuchillo, es decir, plato = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.

Ahora, sólo falta descifrar el valor numérico de la tetera y de la azucarera en el VII renglón. Puesto que para las cifras 1, 2, 3, 1, 5, 6 y 7 los objetos ya han sido encontrados, queda solamente elegir entre 8, 9 y 0. Substituyendo en la operación de división, representarla en los tres último renglones, en lugar de los objetos las cifras; correspondientes, obtenemos la disposición siguiente (con las letras *t* y *a* se denotan, respectivamente, la tetera y la azucarera):

$$\begin{array}{rl} 774 & : ta = \;\; 1 \\ -\;\; 712 & \\ 62 & \end{array}$$

El número 712, como vemos, es el producto de los dos números desconocidos, *ta* y *t* que no pueden ser, naturalmente, ni cero, ni terminados en cero: es decir, ni *t*, ni *a* son cero. Entonces, quedan ya sólo dos alternativas: t = 8 y a = 9 o bien, t = 9 y a = 8. Pero multiplicando 98 * 8 = 712 no obtenemos 712; por consiguiente, la tetera representa al 8, y la azucarera al 9 (efectivamente: 89 * 8 = 712).

Así, por medio de sencillos cálculos aritméticos desciframos la inscripción jeroglífica de los objetos de servicio de una mesa:

tenedor 1

cuchara	2
copa	3
cuchillo	4
jarra	5
taza	6
plato	7
tetera	8
azucarera	9

Y toda la serie de operaciones aritméticas, representada por este original servicio de mesa, adquiere, sentido:

$$
\begin{array}{r l}
52 & \\
\underline{*12} & \\
624 & \\
\underline{-312} & \\
+462 & \\
774 & :89=8 \\
\underline{-712} & \\
62 &
\end{array}
$$

Volver

11. Charadas Aritméticas

Lo que denomino charadas aritmética constituye un juego recreativo: la adivinanza de determinada palabra por la resolución de un problema al estilo del que resolvimos en el párrafo anterior. El adivinador piensa una palabra de 10 letra, diferentes (no repetidas). Por ejemplo: terminado, acostumbre, impersonal. Tomando letras de la palabra concebida, por cifras, representará por medio de estas letras cualquier caso de división. Si la palabra proyectada es *terminados*, se puede dar un ejemplo de división así:

t	e	r	m	i	n	a	d	o	s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

dividendo: 4517820 = *mitades*; divisor: 87890 = *dados*

$$
\begin{array}{r r r r r}
 & 4517820 & : & 87890 & = 51 \\
- & 4394500 & & & \\
\hline
 & 123320 & & & \\
- & 87890 & & & \\
\hline
 & 35430 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r r r r r}
 & \textit{mitades} & : & \textit{dados} & = \textit{it} \\
- & \textit{mromis} & & & \\
\hline
 & \textit{terres} & & & \\
- & \textit{dados} & & & \\
\hline
 & \textit{rimrs} & & &
\end{array}
$$

Se pueden tomar también otras palabras:

dividendo: 8945673 = *dominar*; divisor: 45670 = *minas*

```
   dominar  :  minas  =  toi
–    minas
------------------------------
    mradna
–   mttsrs
------------------------------
    endrar
–   eedris
------------------------------
     msser
```

La representación literal de un determinado caso de división, se confía a un adivinador, quien conforme a ésto, en una primera ojeada sobre el conjunto de palabras incoherentes, deberá adivinar la palabra concebida. Como se debe tratar de descubrir el valor numérico de las letras en semejantes casos, ya lo sabe el lector: lo explicamos durante la resolución del problema del párrafo anterior. Con cierta paciencia, se pueden descifrar estas charadas aritméticas, a condición únicamente de que el ejemplo sea bastante largo y proporcione el material necesario para las suposiciones y pruebas. Si son escogidas palabras que den casos excesivamente cortos de la división, por ejemplo:

a	c	o	s	t	u	m	b	r	e
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

dividendo: 21411 = *casas*; divisor: 9053 = *reto*

```
   casas  :  retos  =  c
–  abaeu
--------------------------
    ooeb
```

entonces, la adivinación es muy laboriosa. En semejantes casos, es necesario solicitar, del adivinador, la continuación de la división hasta centésimos o milésimos, es decir, obtener en el cociente, aún, dos o tres fracciones decimales. He aquí un ejemplo de división hasta centésimos:

i	m	p	e	r	s	o	n	a	l
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

dividendo: 21039 = *milpa*; divisor: 2939 = *mapa*

	milpa	:	*mapa*	= *ois*
–	*mlrop*			
	essl			
–	*mapa*			
	iomil			
–	*iospe*			
	ros			

Si en este caso nos limitásemos a la parte entera (o), la clave de la palabra propuesta sería poco probable.
En cuanto a las palabras empleadas en calidad de "clave" para semejantes charadas, su elección no es tan difícil como parece; además de las antes indicadas se pueden utilizar las palabras: *futbolista, inyectarlo, esquivador, profetizas, reticulado, esculpidor*
Volver

12. Descubriendo un Número de Tres Cifras
Veamos aún otro acertijo aritmético de distinto carácter. Un número desconocido consiste de tres cifras diferentes: *A*, *B*, *C*. Lo escribimos, condicionalmente, así: *ABC*, teniendo en mente, que *C* es la cifra de las unidades, *B* la de las decenas y *A*, la de las centenas. Es necesario hallar este número, si es sabido que:

$$\begin{array}{lr} & ABC \\ \times & BAC \\ \hline & {*}{*}{*}{*} \\ + & {*}{*}A \\ & {*}{*}{*}B \\ \hline & {*}{*}{*}{*}{*}{*} \end{array}$$

Los asteriscos denotan cifras desconocidas. Procedamos a encontrar todas:
Ante todo, establezcamos que ni *A*, ni *B*, ni *C* son cero, pues de lo contrario no se podrían obtener tres renglones de productos parciales.
Observemos además que:

el producto *C* X *A* termina en *A*
el producto *C* X *B* termina en *B*

de donde deducimos que *C* puede ser 1 ó 6. Para la unidad, nuestra consideración es evidente; para el 6 se aclara con los ejemplos:

6 X 2 = 12;
6 X 8 = 48;
6 X 4 = 24.

Otras cifras no poseen semejante propiedad. Pero si *C* fuera 1, el primer producto parcial no sería de cuatro cifras, sino solamente de tres. Queda, por consiguiente, una posibilidad: $C = 6$.
Nos convencemos ahora de que $C = 6$ y que, por lo tanto, *A* y *B* pueden ser solamente 2, 4 u 8; pero como el segundo producto parcial consiste solamente de tres cifras, entonces *A* no puede ser ni 4 ni 8, y por lo tanto $A = 2$.
Para *B* quedan dos posibilidades: $B = 4$, y $B = 8$. Si con $A = 2$, *B* fuera 4, el último producto parcial consistiría de tres cifras y no de cuatro; luego, $B = 8$.

Así tenemos, $A = 2$, $B = 8$, $C = 6$. El número buscado es 286, y la multiplicación queda como sigue:

$$\begin{array}{rr} & 286 \\ \times & 826 \\ \hline & 1716 \\ + & 572 \\ & 2288 \\ \hline & 236236 \end{array}$$

Volver

13. El Sistema Decimal de Los Armarios de Libros
El sistema de numeración decimal halla, de paso, aplicación allí donde no era de esperarse, como en las bibliotecas en 1a distribución de libros conforme a secciones.
En algunas bibliotecas masivas se utiliza tal sistema de clasificación de los libros, en la cual un libro tiene, en todo lugar, idéntica notación numérica ("clave"). Este sistema se denomina decimal y libra al lector de la necesidad de consultar el catálogo al requerirse libros de una u otra sección.
El sistema es sencillo y muy conveniente. Su esencia consiste en que, a cada rama del conocimiento se le da una notación numérica en tal forma, que las cifras que la componen informan acerca del lugar que ocupa dicha rama en la organización general de las materias:
Todos los libros se distribuyen, ante todo, conforme a diez secciones principales, que se denotan por las cifras del 0 al 9:

- 0 Obras de carácter general.
- 1 Filosofía.
- 2 Historia de la religión y literatura antirreligiosa.
- 3 Ciencias sociales. Derecho.
- 4 Filología. Lenguas.
- 5 Ciencias, físico-matemáticas y naturales
- 6 Ciencias aplicadas (la medicina, la técnica, la agricultura, etc.)
- 7 Bellas Artes.
- 8 literatura.
- 9 Historia, geografía, biografías.

La primera cifra de la clave (es decir, de la notación numérica) conforme a este sistema, indica directamente a cual de las secciones de libros enumeradas se refiere. Todo libro de filosofía tiene una clave que empieza con 1, de matemáticas con 5, de técnica con 6, etc. Si la clave empieza, por

ejemplo, con la cifra 4, entonces, sin necesidad de revisar los libros, ustedes saben con anticipación que se trata cae la sección de lingüística.
Además, cada una de las secciones, a su vez enumerada se subdividen en 10 subsecciones, que también se denotan por las cifras del 0 al 9; estas cifras ocupan, en la clave, el segundo lugar. Por ejemplo, la 5a. sección que contiene libros de ciencias físico-matemáticas y naturales, se subdivide en las siguientes subsecciones:

50	Obras generales de ciencias físico-matemáticas naturales
51	Matemática.
52	Astronomía. Geodesia.
53	Física. Mecánica Teórica.
54	Química. Mineralogía.
55	Geología.
56	Paleontología.
57	Biología; Antropología. Antropología.
58	Botánica.
53	Zoología.

En forma semejante se dividen, también, las otras secciones. Por ejemplo, en la sección de ciencias aplicadas (6), a la subsección de medicina le corresponde el número 61, a la de agricultura el 63, al comercio y vías de comunicación.
Volver

Los signos y denominaciones aritméticas en diversos pueblos
Cabe pensar que los signos aritméticos, hasta cierto grado, son internacionales, y que son idénticos en todos los pueblos de cultura europea. Esto es cierto sólo con relación a la mayoría de los signos, pero no con relación a todos. Los signos + y -, los signos *x y*: se utilizan con el mismo sentido entre los alemanes, franceses e ingleses. Pero el punto como signo de multiplicación se aplica de diferente forma entre diversos pueblos. Mientras que algunos escriben 1a multiplicación 7.8, otros la denotan como 7·8, elevando el punto a la mitad de la cifra. También el punto decimal se escribe de muy diversas maneras: mientras algunos, como nosotros (se refiere a los soviéticos), escribimos 4,5, otros escriben 4.5, y unos terceros 4·5, colocando el punto arriba de la mitad. Además, cuando se trata de escribir un número decimal que no tiene parte entera, los norteamericanos y los ingleses omiten el cero, lo que no sucede en ningún lugar de Europa Continental. En libros norteamericanos, frecuentemente se pueden hallar notaciones como .725, ·725. o aún ,725 en vez de 0,725 (en México se escribe 0.725). La descomposición de un número en clases se denota, también, en diversas formas. Así, en algunos países se separan las clases con puntos (15.000.000), en otros con comas (15,000,000), y en otros se acostumbra dejar espacio libres, sin signo alguno entre clase y clase (15 000 000). Es instructivo observar, después de eso, cómo se modifica el método de denominación de un mismo número al pasar de una lengua a otra. E1 número 18, en ruso se dice vociemnadtsat es decir, primero se pronuncian las unidades (8) y luego las decenas (10), mientras que en español es a la inverso. En alemán, ese mismo número en la misma sucesión, se lee achtzhen, es decir, ocho diez; en francés, se dice diez ocho (dix-huit). En la siguiente tabla vemos hasta qué punto son distintos, en diversos pueblos, los métodos de denominación del mismo número 18:

en ruso 8 10

en alemán 8 10
en francés 10 8
en armenio 10 + 8
en griego 8 + 10
en latín menos 2 , 20
en neozelandés 11 + 7
en lituano 8 arriba de 10

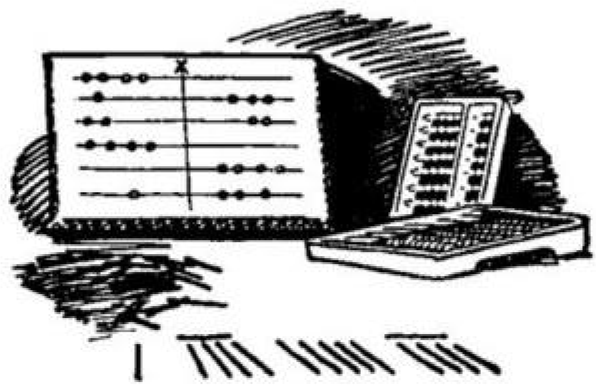
También es curiosa la voz groenlandesa: "del otro pie tres". Esto es, una abreviatura de la suma de los dedos de las manos, de los de un pie, y tres del otro pie. Veamos el sentido que tiene:

número de dedos en ambas manos	10
número de dedos en un pie	5
número de dedos del otro pie	3
Total	18

La voz completa para el número dieciocho sería: "todas mis manos, 3, mi mano", sin tomar en cuenta los dedos de los pies (es decir, 10 + 3 + 5).

Curiosidades Aritméticas:

100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 x 9
100 = 1 + 2 x 3 + 4 x 5 - 6 + 7 + 8 x 9
100 = 1 + 2 x 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9
100 = 1 x 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9
Volver



Capítulo Segundo
El Abaco Antiguo y sus Descendientes.

Contenido:

1. El Rompecabezas de Chéjov

Ahora veremos un ameno problema aritmético, tal y como lo planteó el estudiante de séptimo año, Ziberov, del cuento de Chéjov "el Repetidor".

"Un comerciante compró 138 arshins (1 arshin = 80 cm) de tela negra y azul por 540 rublos. Me pregunto, ¿cuántos arshin compró de cada una, si la tela azul costaba 5 rublos por arshin, y la negra, 3 rublos?"

Con gran humor, Chéjov relata cómo trabajaron sobre este problema tanto el repetidor de 7º año como su alumno Pedrito, de 12 años, mientras éste no fue rescatado por su padre:

"Pedrito observó el problema y, sin decir una palabra, empezó a dividir 540 entre 138.

- ¿Para qué divide Ud.? ¡Deténgase! O... continúe... ¿Aparece un residuo? Aquí no puede haber residuo. ¡Permítame!

- Probablemente no se trate de un problema aritmético, pensó, y vio la respuesta: 75 y 63-. Hmm!, dividir 540 entre 5 + 3? no, no.

- Bien, ¡resuélvalo ya! - concluyó, ordenando a Pedrito.

- ¿Qué tanto piensas? Ese problema te quitará todo el tiempo - dijo a Pedrito su padre, Udodov. Se necesita ser tonto. Resuélvalo Ud. por esta vez, Egor Aliékseich.

Egor Aliékseich, coge el pizarrín y se dispone a resolverlo; tartamudea, enrojece. Palidece.

- Este problema debe ser algebraico – dijo -. Se puede resolver con ayuda de la *x* y de la *y*, Por otra parte, también así se puede resolver: Yo aquí he dividido...¿Comprende? Ahora es necesario restar. ¿Entiende?...o si no. . . Lo mejor será que me lo traiga resuelto mañana… Pienselo !

Pedrito sonrió. Udodov también sonrió. Ambos comprendían la confusión del maestro. El estudiante de VII grado se confundió aún más, y empezó a pasear de extremo a extremo de la habitación.

Al fin, Udodov dijo:

- Sin álgebra también se puede resolver - y agregó dirigiéndose hacia un ábaco- helo aquí, mire... Utilizó el ábaco, y obtuvo 75 y 63, tal y como debía ser.

- Esto está hecho a nuestra manera… no científica".
Esta historia con el problema que había sembrado la confusión en el repetidor, plantea por sí misma tres nuevos problemas, a saber:

1. ¿Cómo hubiera el repetidor resuelto el problema algebraicamente?
2. ¿ Cómo debió haber resuelto el problema Pedrito ?
3. ¿Cómo se lo resolvió su padre a Pedrito con el ábaco, en forma "no científica"?

A las primeras dos cuestiones, podemos responder probablemente sin trabajo alguno. La tercera no es tan simple. Pero vayamos en orden.

1. El repetidor de séptimo año hablaba de resolver el problema "con la ayuda de la x y de la y", y decía que el problema debía ser "algebraico". Formar dos ecuaciones con dos incógnitas para el problema dado no es difícil; hela aquí:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 138 \\ 5x + 3y &= 540 \end{aligned}\right]$$

donde x es el numero de arshins de tela azul, e y, el de tela negra.

2. Sin embargo se resuelve fácilmente, también, en forma aritmética. Suponiendo que toda la tela hubiera sido azul, los 138 arshins de tela azul hubieran costado 5 * 138 = 690 rublos; esto es, 690 - 590 = 150 rublos más del costo en la realidad. Para que el precio sea 150 rublos menor, basta considerar que la diferencia de precios entre un arshin de tela azul y uno de tela negra es de 5 - 3 = 2 rublos: dividiendo 150 entre 2, obtenemos 75 arshins de tela negra; restándolos de los 138 originales, obtenemos 138 - 75 = 63 arshins de tela azul. Así debió haber resuelto el problema Pedrito.

3. Queda aún la tercera pregunta: ¿Cómo resolvió el problema Udodov?
En el relato, se dice bien poco: "Utilizó el ábaco, y obtuvo 75 y 63, tal y como debía ser".
¿Cuáles son los métodos de resolución de un problema con la ayuda del ábaco?
El ábaco sirve para efectuar operaciones aritméticas tal y como se hace en el papel (fig. 13).
Udodov conocía muy bien el ábaco y pudo hacer las operaciones muy rápido, sin la ayuda del álgebra como quería el repetidor, ni "de la x y de la y". Veamos ahora las operaciones que el padre de Pedrito debió hacer en el ábaco.

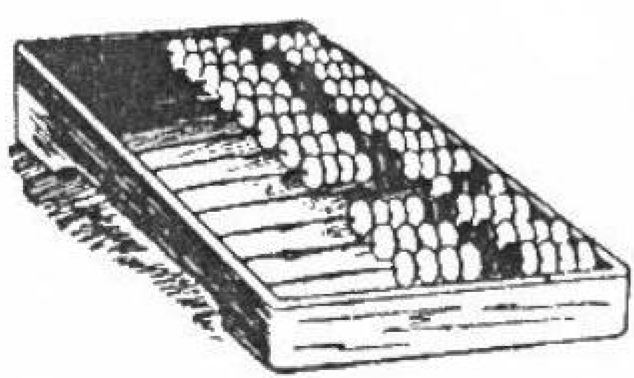


Figura 13. Abaco al estilo ruso.

La primera operación debió haber sido, como sabemos, multiplicar 138 por 5. Para eso, conforme a las reglas de las operaciones en el ábaco, primeramente multiplicó 138 por 5, es decir, simplemente movió el número 138 una hilera hacia arriba (ver la figura 14, a, b) y luego dividió este número entre dos, sobre el mismo ábaco. La división se empieza por abajo: se separan la mitad de bolitas colocadas en cada alambre; si el número de bolitas es impar en un alambre dado, se elimina la dificultad, "partiendo" una bolita de este alambre en 10 inferiores.

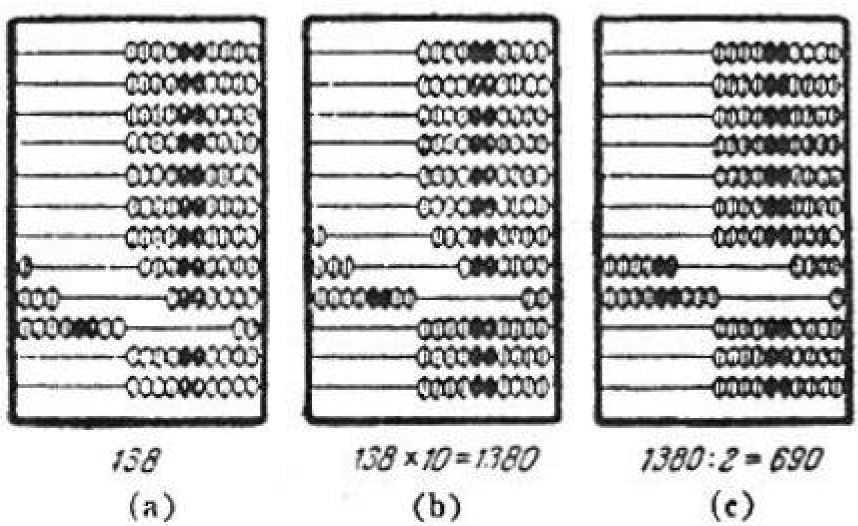


*Figura 14. Primero se muestra, en el ábaco, 138 * 10, es decir el número 138 (a), sometido a la operación (b), y luego se muestra el resultado anterior dividido entre dos (c)*

En nuestro caso, por ejemplo, 1380 se divide por la mitad en la forma siguiente: en el alambre inferior, donde existen 8 bolitas, se separan 4 bolitas (4 decenas), en el alambre intermedio de las 3 bolitas se separa 1, pero se conserva una, y la otra se substituye mentalmente por 10 inferiores y se dividen a la mitad, añadiendo o decenas a las bolitas inferiores; en el alambre superior se "parte" una bolita agregando 5 centenas a las bolitas del alambre intermedio. En consecuencia, en el alambre superior no hay bolitas, en el intermedio 1 + 5 = 6 centenas y en el inferior 4 + 5 = 9 (Fig. 14, c). En total 690 unidades. Todo esto se efectúa rápida y automáticamente.
Después, Udodov debió restar 540 de los 690. Sabemos cómo se hace en el ábaco.
Finalmente quedaba tan sólo dividir por la mitad la diferencia obtenían: 150; Udodov apartó 2 de las 5 bolitas (decenas), entregando 5 unidades a la fila inferior de bolitas; después de 1 bolita en el alambre de las centenas, entregó 5 decenas a la fila inferior: obtuvo 7 decenas y 5 unidades, es decir, 75.
Naturalmente, estas sencillas operaciones se efectúan más velozmente en el ábaco, que como aquí son descritas.
Volver

2. Cómo Calculaban en la Remota Antigüedad

Desde hace mucho tiempo, la gente ya sabía contar. Los dedos de las manos constituyeron el primer instrumento natural para contar. De ahí vino la idea de un sistema decimal de numeración en muchos pueblos antiguos. Debemos decir que las operaciones aritméticas con los dedos sirvieron mucho tiempo como medio práctico para algunos pueblos, inclusive para los antiguos griegos. No debemos creer que con los dedos sólo se puede contar hasta diez. Por documentos de la literatura griega antigua que han llegado hasta nosotros, sabemos que ya en los siglos V y IV antes de nuestra era se habían desarrollado considerablemente las operaciones con los dedos cuyos resultados llegaban a miles.

Posteriormente, entre los egipcios, griegos, romanos y chinos, y en otros pueblos antiguos, aparece un aparato para calcular que, de acuerdo a su idea, recuerda nuestro ábaco. Su forma en distintos pueblos era diferente. Así, el ábaco griego era en sí, un tablero (mesa) con cuadro, dibujados (fig.15), en el cual se desplazaban fichas especiales que hacían el papel de las bolitas de los ábacos de nuestro tiempo. El ábaco romano tenía la forma de un tablero de cobre con canales (con cortes), en los que se desplazaban botones.

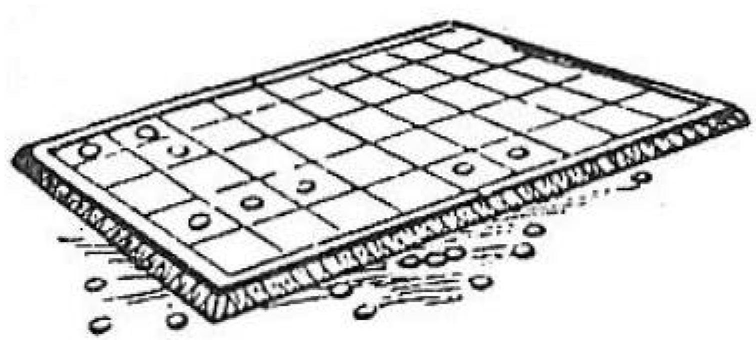


Figura 15. Tablero y fichas utilizadas para efectuar operaciones aritméticas, antes del aparato ábaco

En la antigua China, para la representación de los números en el tablero de cálculo, se empleaban palitos con una longitud de 10 cm. y un espesor de 1 cm. Ya cerca del año 150 de nuestra era, eran ampliamente conocidos en China los métodos para efectuar, en el tablero de calcular, las cuatro operaciones aritméticas.

Había dos maneras de representar las cifras en el tablero de operaciones chino. Ambas están reproducidas en la fig. 16.

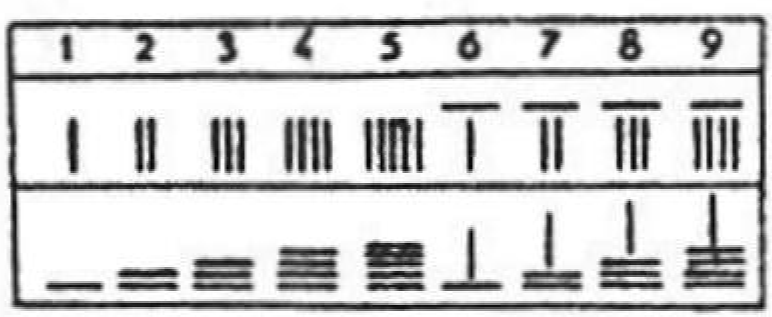


Figura 16. Dos métodos de formación de cifras, en la tabla de operaciones china

En la escritura de loa números en el tablero, se seguía el siguiente proceso: la primera cifra (leyendo de derecha a izquierda) se representaba por el primer método; la siguiente, por el segundo; la tercera cifra de nuevo se representaba por el primer método, y la cuarta por el segundo método, y así sucesivamente. En otras palabras, todas las cifras de un número, que ocupaban lugares impares (leyendo de derecha a izquierda), se representaban por el primer método, y aquellas que se encontraban en los lugares pares, eran representadas por el segundo método. Por ejemplo, los números 78639, 4576 y 1287 se representaban en el tablero de calcular como se ve en la fig. 17.

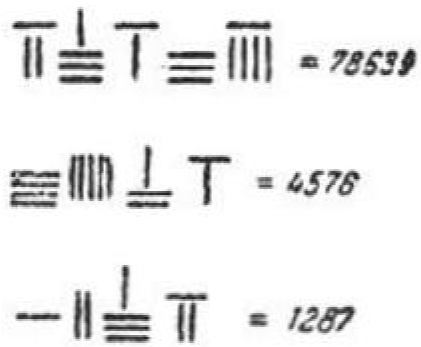
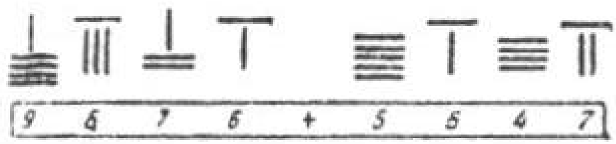


Figura 17. Ejemplos de construcción de algunos números en la tabla china de operaciones (o cálculos)

Ahora veremos cómo se llevaban a cabo, de acuerdo con este tablero de calcular, las operaciones de la adición, y de la multiplicación.

Adición. Consideremos que se desea hallar la suma de los dos números 9876 y 5647. Primeramente se les representa en el tablero de operaciones:

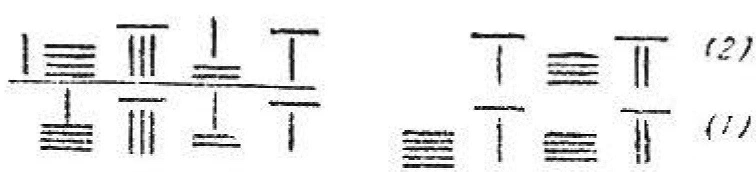


Cuadro 8

La adición se realizaba empezando con los órdenes superiores, es decir, desde la izquierda.
1er Paso: Sumemos los millares

$$9 + 5 = 14$$

Representamos esto así:



Cuadro 9

es decir. sobre los sumandos formamos un segundo renglón y a la izquierda, arriba de la cifra 9, escribimos 14 en tal forma, que la cifra 4 esté estrictamente arriba de la cifra 9, y parte restante del primer sumando la transcribimos sin modificaciones. Sobre el segundo sumando repetimos todas sus cifras, excepto la cifra 5 ya utilizada.

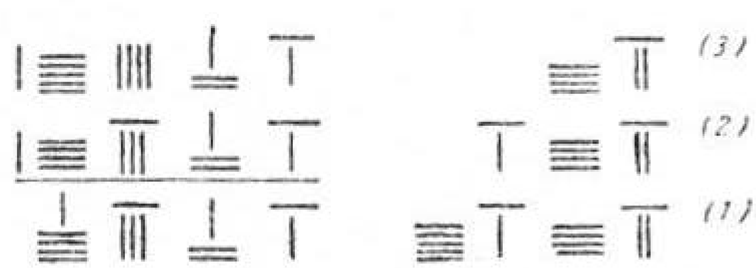
2do Paso: Sumemos las centenas

$$8 + 6 = 14$$

y puesto que obtenemos en la adición una unidad de mayor orden, la agregarnos a la suma anteriormente obtenida.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 4 \\ 1 & 4 & \\ \hline 1 & 5 & 4 \end{array}$$

así, el tercer renglón quedará (los primeros dos se repiten intactos)



Cuadro 10

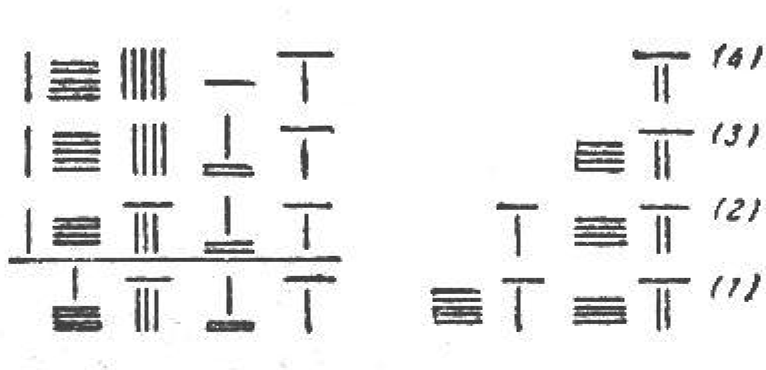
en el tercer renglón a la izquierda se escribe 154, y después se repiten las dos últimas cifras (76) del primer sumando: a la derecha están repetidas las dos últimas cifras (47) del segundo sumando (sus cifras restantes ya han sido utilizadas).
3er. Paso: Sumemos las decenas

$$7 + 4 = 11,$$

con lo que e1 siguiente resultado es

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 4 & \\ & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 5 & 1 \end{array}$$

el número 1551 se escribe a la izquierda, en el cuarto renglón:



Cuadro 11

4º Paso: ahora, falta solamente sumar las unidades

6 + 7 = 13

y la suma de los dos números dadas se determina : es igual a 15523:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 5 & 1 & \\ & & & 1 & 3 \\ \hline 1 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array}$$

el número 15523 obtenido, está escrito en el quinto renglón de la columna izquierda, y el esquema de la adición, finalmente, tiene el aspecto representado en la fig. 18

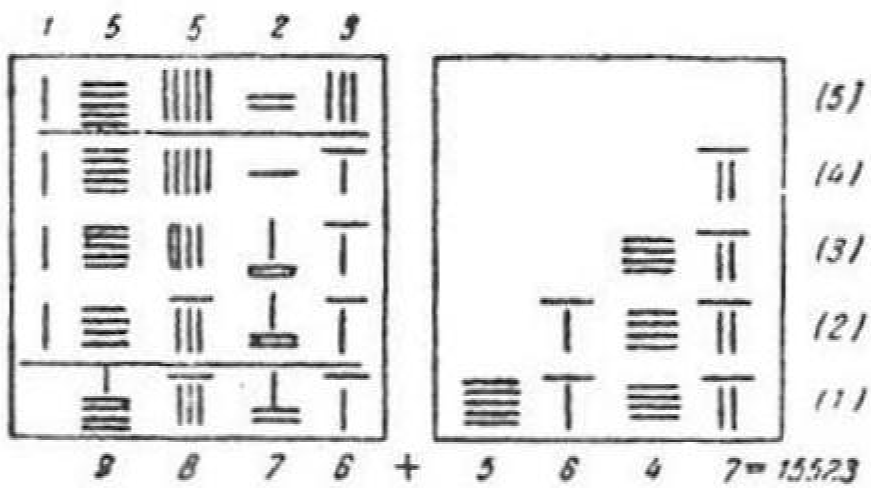


Figura 18. En este dibujo se representa la suma de dos números, 9876 y 5647, según el tablero chino de cálculo

Multiplicación. En el tablero de operaciones de la antigua China, la multiplicación se iniciaba con las cifras de orden superior, pasando gradualmente a las cifras de órdenes menores. Además, ya se empleaban las tablas de multiplicar.

Supongamos, a título de ejemplo, que se trata de multiplicar 346 por 27. El proceso de la multiplicación en la tabla de operaciones observado en nuestras notaciones, tomaba aproximadamente el siguiente aspecto:

$$\begin{array}{ccccc}
3 & 4 & 6 & & \\
\times & 2 & 7 & & \\
\hline
 & 6 & & & \\
 & 2 & 1 & & \\
 & & 8 & & \\
 & & 2 & 8 & \\
 & & 1 & 2 & \\
 & & & 4 & 2 \\
\hline
 & 9 & 3 & 4 & 2
\end{array}$$

Primeramente, multiplicamos 3 por 2 y obtenemos 6; es decir, la cifra del orden más alto del producto (número de millares). Después, multiplicamos, 3 por 7 y 4 por 2, obteniendo 21 y 8 centenas; los escribimos debajo de la cifra 6, considerando los órdenes, como está indicado. Luego, multiplicamos 4 por 7 y 6 por 2 (esto nos da los números de 28 y 12), y finalmente, multiplicamos 7 por 6 para obtener 42 unidades: sumando las anteriores cantidades, obtenemos 9342.

El tablero de calcular y los métodos de operar con él, se conservaron en China hasta el siglo XIII. En esta época se empezó a emplear el cero, el que con ayuda de los palitos de calcular se representaba en forma de cuadrado.

Entonces, ya se podían representar también las fracciones decimales en el tablero de calcular. Por ejemplo, los números 106 368 y 6312 se representaban aproximadamente como se muestra en la finura 19.

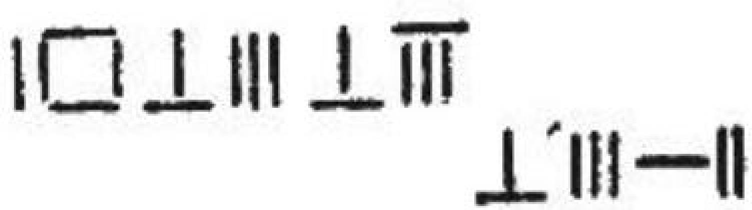


Figura 19. Ejemplo de construcciones en la tabla de operaciones china. La combinación de los números 106 368 y 6312

En el siglo XV, en China y Japón ya se empleaba, para las cuatro operaciones aritméticas, un ábaco de siete bolitas en cada alambre (llamado en China "suang-pang"[1], y en Japón "Soroban") (ver la fig. 20). Estos aparatos de calcular se han conservado hasta nuestros días y su empleo es muy popular.

[1] El ábaco suang pang se llegó a construir en miniaturas (17 mm. x 8 mm.), y también se construyeron de 6 bolitas de cinco de un lado y una del otro: el número de alambres, (o renglones) llegaba a 21.

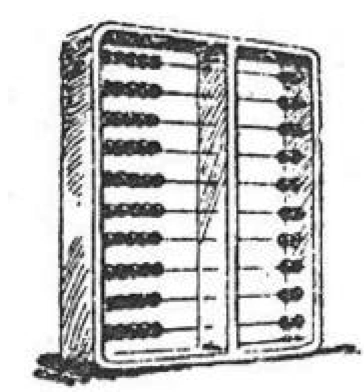


Figura 20. Abaco usado en China y Japón, con siete bolitas de marfil en cada alambre

He aquí por ejemplo, la opinión de un científico japonés: A pesar de su antigüedad, el sorobán supera a todos los aparatos de cálculo modernos, gracias a su facilidad de manejo, a lo simple del dispositivo y a su bajo costo.

El Abaco Ruso

Hay algunos objetos útiles que no valoramos lo suficiente debido a su constante manejo, lo que los ha convertido en objetos demasiado comunes de uso doméstico. Al grupo de tales objetos insuficientemente estimados pertenece nuestro ábaco: aparato de cálculo popular ruso que representa en sí, una modificación del famoso "ábaco" o "tablero de cálculo", de nuestros remotos antecesores.

Mientras tanto, Occidente casi no sabe acerca de los ábacos, y únicamente en las escuelas superiores existen enormes ábacos: Un medio práctico escolar en la enseñanza de la numeración.

Tenemos razón al enorgullecernos de nuestros ábaco de calcular, puesto que gracias a su dispositivo sorprendentemente sencillo, y con base en los resultados que pueden lograrse en ellos, pueden competir, en ciertos aspectos, inclusive con máquinas calculadoras. En unas manos hábiles, este sencillo aparato hace con facilidad, verdaderas maravillas. Un especialista que trabajó antes de la revolución en una gran firma rusa vendedora de maquinas calculadoras, me contó que en más de una ocasión tuvo oportunidad de observar la admiración que despertaban los ábacos ruso en extranjeros importadores de modelos de mecanismos calculadores complicados.

En vez de multiplicar por 7, multiplíquese el multiplicando por 10 y luego réstese el mismo tres veces.

La multiplicación por 8 da el mismo resultado que, restar el doble del multiplicando al producto de la multiplicación por diez.

Para multiplicar por 9, multiplíquese por diez y réstese el multiplicando.

Para multiplicar por 10, basta elevar todo el número un renglón.

El lector, probablemente ya por sí mismo, comprende cómo es necesario proceder en la multiplicación por números mayores de 10 y qué clase de substituciones resultan las más convenientes. Así, en vez de 11 se usará 10 + 1, en vez de 12, 10 + 2.

Consideremos algunos casos especiales para multiplicadores de la primera centena:

20 = 10 x 2	32 = 22 + 10
22 = 11 x 2	42 = 22 + 20
25 = (100:2):2	43 = 33 + 10

26 = 25 + 1	46 = 50 - 5
27 = 30 – 3	63 = 33 + 30 etc.

Como se ve, con ayuda de los ábacos es más sencilla la multiplicación por 22, 33, 44, 55, etc., que por otros números: por tal razón, es necesario tratar de aprovecharse, en la descomposición de los multiplicadores, de número, semejantes con idénticas cifran.
A método similares se recurre también en la multiplicación por números mayores que 110. Si tales métodos artificiales resultan agotadores, siempre podremos recurrir a multiplicar, con ayuda de los ábacos, conforme a una regla general que consiste en multiplicar cada cifra del multiplicador, y escribir los productos parciales. Esto, desde luego, proporciona una reducción de tiempo.

La División en el Abaco

Naturalmente, la división en el ábaco es más difícil que la multiplicación; para esto es necesario recordar una serie de métodos especiales, a veces bastante complicados. A quienes se interesen en ellos, les sugerimos, que consulten un manual especializado. Aquí indicamos sólo lo referente a un ejemplo de los métodos adecuados de la división por números de la primera decena (excepto el número 7, con el cual el método de división es demasiado complicado).
Sabernos ya cómo dividir entre 2 lo cual es muy simple.
El método de división entre 3 es más complicado y consiste en multiplicar por la fracción periódica infinita 0.3333... (se sabe que 0.333...=1/3). Sabemos multiplicar, con ayuda del ábaco, por 3; también podemos disminuir en 10 veces; así pues, es necesario solamente, trasladar el dividendo un alambre hacia abajo. Después de breves ejercicios, este método de división entre 3 a primera vista muy largo se muestra muy adecuado en la práctica.
La división entre 4, naturalmente, equivale a dividir 2 veces entre 2.
Más fácil aún es la división entre 5: basta duplicar, y dividir entre 10.
Entre 6, hay que seguir dos pasos: dividir entre 2, y luego entre 3
La división entre 7 es muy complicada con el ábaco, por lo que aquí no hablaremos de ella.
La división entre 8 equivale a dividir tres veces entre 2.
Es muy interesante la división entre 9. Sabemos que 1/9 = 0.11111... Está claro aquí que, en lugar de la división entre 9 se pueden sumar sucesivamente 0.1 del dividendo + 0.01 del mismo x 0.001 ... etc.[2]
Como se ve es muy fácil dividir entre 2, 10 y 5, y naturalmente entre sus números múltiplos 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Estos casos de la división, no representan obstáculo incluso para el que tiene poca experiencia en el manejo del ábaco.
Volver

3. Ecos de la Antigüedad

Cierto vestigios de la antigüedad, tanto en el lenguaje, como en las costumbres están relacionados con los más remotos antecesores de nuestros ábacos de calcular. Pocos sospechan, por ejemplo, el origen de lo que a veces hacemos "para la memoria" al anudar un pañuelo.
Con esto, repetimos lo que con sentido común hacían antiguamente nuestros antecesores, "escribiendo" sobre cordeles el total de un cálculo. Una serie de correas o cuerdas con nudos efectuados a lo largo de ella, representaba en sí un aparato de calcular (fig. 21) en principio, análogo al ábaco. Esto constituye el "ábaco de cuerda" peruano denominado “quipos”. Un nudo

[2] Este método es útil también para la división oral entre 9

hecho una sola vez sobre la cuerda, denotaba 10: dos veces, 100: tres veces 1000, y así sucesivamente.

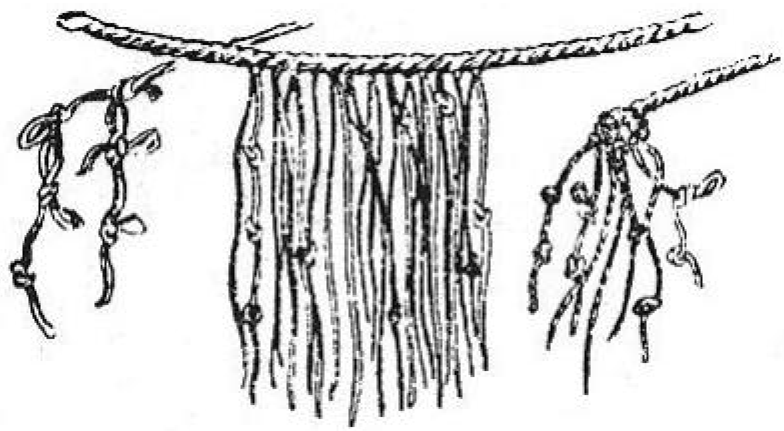


Figura 21. Aparatos de calcular usados por los antiguos peruanos, llamados "quipos"

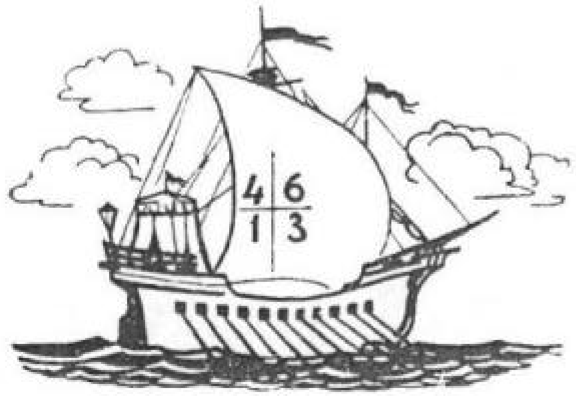
Palabras como "banco" y "cheque" tan difundidas actualmente están relacionadas con el ábaco. En alemán "bank" significa banco, escaño, silla.
¿Qué hay de común entre la institución financiera 'bank" en el sentido moderno de la palabra y el banco o escaño?. Lo que aquí se señala, está lejos de ser una simple coincidencia de nombres. El ábaco en forma de banco tuvo una amplia difusión en los círculos comerciales de Alemania en los siglos XV y XVI; cada banco de cambio u oficina bancaria, se caracterizaba ante todo por la presencia de un "banco de contabilidad".
Una relación más indirecta con el ábaco, tiene la palabra "check" (cheque); es de origen inglés y procede del verbo "checker" (registrar, revisor) ; "checkered" (registrado, cotejado) se llamaba a una servilleta de cuero rayado, en forma de ábaco, que en los siglos XVI y XVII los comerciantes ingleses portaban consigo en forma enrollada, y en el caso que se necesitase efectuar cuentas, la desplegaban sobre una mesa. Las formas para los cálculos se rayaban según el modelo de esto, ábacos enrollados, y no es extraño que fuera transferido a ellas, en forma abreviada, el nombre de estos aparatos de calcular: de la palabra "checkered" se originó la palabra "check".
Es curioso que de aquí se haya originado la expresión "se quedó con un palmo de narices" la cual la aplicamos actualmente al hombre que ha perdido todo su dinero. Esto también se relaciona con la época en que todos los cálculos monetarios se realzaban sobre el ábaco, por medio de habichuelas que substituían a las cuentas de nuestros ábacos. En la abra "El Estado del Sol" de Campanella (1602) leemos: "Uno calcula con piedrecillas, el otro con habichuelas. Un hombre, habiendo perdido su dinero, se quedaba con unas habichuelas que representaban la suma de su pérdida: de aquí precisamente el correspondiente giro del lenguaje.

Volver

4. Curiosidades Aritméticas

$$100 = 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9$$
$$100 = 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89$$
$$100 = 123 + 4 - 5 + 67 - 89$$

Volver



Capítulo Tercero
Algo de Historia

Contenido:

1. "Las divisiones es un asunto difícil"

Hemos visto que la división en general es más complicada que la multiplicación y aunque ahora podemos resolverla con gran facilidad, no siempre fue así.
En la antigüedad se consideraba "sabio" a quien hacia correctamente y con rapidez las divisiones; cada "maestro en división" (algo así como especialista) debía comunicar a los demás el resultado de determinados casos de esta operación.
Algunas veces, encendiendo un cerillo con un movimiento habitual, todavía reflexionamos sobre cuánto trabajo costó a nuestro antecesores, inclusive no muy remoto, la obtención del fuego. Empero pocos sospechan que a los actuales métodos de realización de las operaciones aritméticas tampoco fueron, en su origen, así de sencillos y cómodos para que en forma tan rápida y directa condujeran al resultado.
Nuestros antepasados emplearon métodos mucho más lentos y engorrosos, y si un escolar del siglo XX pudiera trasladares tres o cuatro siglos atrás, sorprendería a nuestros antecesores por la rapidez y exactitud de sus cálculos aritméticos. El rumor acerca de él recorrería las escuelas y monasterios de los alrededores, eclipsando la gloria de los más hábiles contadores de esa época, y de todos lados llegarían gentes a aprender del nuevo gran maestro el arte de calcular.
Particularmente difíciles y complejas eran en la antigüedad las operaciones de la multiplicación y la división: esta última en mayor escala. "La multiplicación es mi martirio, y con la división es la desgracia" decían entonces. Pero aún no existía, como ahora, un método práctico elaborado para cada operación. Por el contrario, estaba en uso simultáneamente casi una docena de diferentes métodos de multiplicación y división con tales complicaciones que su firme memorización sobrepasaba a las posibilidades del hombre medio. Cada "maestro de la división" exaltaba su método particular al respecto.

En el libro de V. Belustino: "Cómo llegó la gente gradualmente a la aritmética actual" (1911), aparecen 27 métodos de multiplicación, y el autor advierte: "es muy posible que existan todavía métodos ocultos en lugares secretos de bibliotecas, diseminados fundamentalmente en colecciones manuscritas" : y todos estos métodos de multiplicación : "ajedrecístico o por organización", "por inclinamiento", "por partes", "por cruz pequeña", "por red", "al revés", "por rombo", "por triángulo", "por cubo o copa", "por diamante", y otros[1], así como todos los métodos de división, que tenían nombres no menos ingeniosos, competían uno con otro tanto en voluminosidad como en complejidad. Dichos métodos se asimilaban con gran trabajo y solamente después de una prolongada práctica. Inclusive se consideraba que para poder dominar la multiplicación y la división de números de varias cifras significativas con rapidez y exactitud, era necesario un talento natural especial, capacidad excepcional: sabiduría que para los hombres sencillos era inaccesible.
"Asunto difícil es la división"(dura cosa e la partida) decía un antiguo refrán italiano; acertado refrán si se toman en cuenta los agotadores métodos con que se realizaban entonces: no importa que estos métodos llevaran a veces nombres demasiado festivos: bajo ellos se ocultaba una larguísima serie de complicadas manipulaciones. Así, en el siglo XVI se consideraba el método más corto y cómodo el de división por "lancha o galera". El ilustre matemático italiano de esa época. Nicolás Tartaglia (siglo XVI), escribió en su extenso manual de aritmética lo siguiente respecto a dicho método:

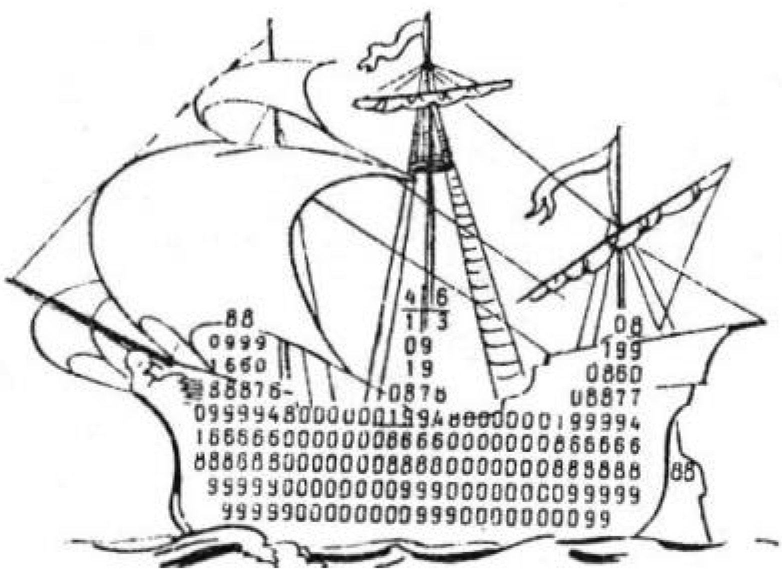


Figura 22. División de números a la manera antigua, por el método de "galera"

"El segundo método de división se llama en Venecia, por lancha o galera, debido a que en la división de ciertas clases de números se forma (ver fig. 22) una figura parecida a una lancha, y en la de otras, a una galera que a veces se obtiene tan bien terminada, que se muestra provista de todos sus elementos principales tales como popa y proa, mástil, velas y remos".
Esto parece muy divertido, pero aunque el antiguo matemático recomienda precisamente dicho método como "elegante, fácil, exacto, usual y el más general de los existentes, útil para la división de todos los números posibles", yo no me decido a desarrollarlo aquí por el temor de que hasta un

[1] Los ejemplos de multiplicación enunciados se especifican en la antigua "Aritmética" de Nicolas Tartaglia. Nuestro método moderno de la multiplicación se describe allí con el nombre de "ajedrecístico".

lector paciente cierre el libro en ese aburrido lugar y no lea más adelante. Sin embargo, este agotador método fue, efectivamente, el mejor en esa época.

Figura 23. Grabado de la "Aritmética" de Magnitski (editada en el año 1703). El dibujo representa el Templo de la Sabiduría. La Sabiduría está sentada en el trono de la Aritmética y en los escalones están los nombres de las operaciones aritméticas (división, multiplicación, sustracción, adición, cálculo). Las columnas son las ciencias en que la aritmética encuentra aplicación: geometría, estereometría, astronomía, óptica (conocimientos adquiridos por "vanidad"), mercatoria (es decir cartografía), geografía, fortificación, arquitectura (conocimientos adquiridos por "estudio"). Bajo las columnas dice, también en eslavo antiguo: "La Aritmética que se apoya en las columnas, lo abarca todo"

En Rusia, se usó hasta la mitad del siglo XVIII: entre los seis métodos que presenta León Magnitski[2] en su "Aritmética" (de los cuales ninguno es semejante al contemporáneo) el autor describe éste, y lo recomienda especialmente; a lo largo de su voluminoso libro (640 páginas de gran formato) Magnitski se sirve exclusivamente del "método de galera", no empleando, por otra parte, esta denominación.

Por último, mostramos al lector la siguiente "galera" numérica, aprovechando un ejemplo del mencionado libro de Tartaglia[3]:

[2] Antiguo manual ruso de matemática, que engloba todas sus ramas conocidas en esa época (incluyendo informaciones de astronomía náutica). Este es uno de los dos libros que Lomonósov denominó "las puertas de mi erudición".

[3] Los últimos dos nueves se agregan al divisor durante el proceso de la división.

```
                      4 | 6
            88        1 | 3        08
          0999         09         199
          1660         19        0860
         88876        0876      08877
      0999948000000199480000000199994
      16666600000086660000000866666
Dividendo — 888888000000088880000000888888
                                    (88 — Cociente
 Divisor(3) — 99999000000000999000000000099999
              9999900000000990000000099
```

Cuadro 13

Llegando después, de múltiples trabajos al final de una operación aritmética, nuestros antecesores consideraron absolutamente necesario comprobar este total obtenido con el sudor de su frente, ya que los métodos voluminosos provocaron, como es lógico, desconfianza hacia sus resultados; es muy fácil perderse en un camino, lardo y sinuoso que en el recto camino de los métodos modernos. Naturalmente, de aquí surge la antigua costumbre de comprobar toda operación aritmética efectuada, encomiable regla que aún hoy se practica.

El método favorito de comprobación era el llamado "método del nueve", el cual frecuentemente se describe en algunos manuales contemporáneos de aritmética.

La comprobación por el nueve se basa en la "regla de los residuos" que dice: el residuo de la división de una suma entre cualquier número, es igual a la suma de los residuos de la división de cada sumado entre el mismo número. En la misma forma, el residuo de un producto es igual al producto de los residuos que al dividir entre 9 la suma de las cifras del mismo número. Por ejemplo, 758 entre 9 da como residuo 2: el mismo 2 se obtiene como residuo de la división de 7 + 5 + 8 entre 9.

Comparando ambas propiedades indicadas, llegamos al método de comprobación por nueve, es decir, por división entre 9. Mostraremos con un ejemplo en qué consiste dicho método[4].

Se desea comprobar la justeza de la adición de la siguiente columna:

38932	7
1096	7
+ 4710043	1
589106	2
5339177	8

Realicemos la suma de las cifras de cada sumando y al mismo tiempo, en los números de dos cifras obtenidas, sumemos también las cifras (esto se hace en el proceso mismo de adición de las cifras de cada sumando), hasta obtener en el resultado final un número de una cifra. Estos resultados (residuos de la división entre nueve), los escribimos como se indica en el ejemplo, al lado del correspondiente sumando. A1 sumar todos los residuos (7 + 7 + 1 + 2 = 17; 1 + 7 = 8), obtenemos 8. Igual deberá ser la suma de las cifras del total (5339177) si la operación está efectuada correctamente: 5 + 3 + 3 + 9 + 1 + 7 + 7, después de todas las simplificaciones resulta igual a 8.

[4] Se aclara en forma apropiada en la deducción de la prueba de divisibilidad entre 9.

La comprobación de la substracción se realiza en la misma forma si se considera al minuendo como suma, y al substraendo y la diferencia como sumandos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 6913 \\ \underline{-\ 2587} \\ 4326 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{-\ 4} \\ 6 \end{array}$$

$$4 + 6 = 10;\ 1 + 0 = 0$$

Este método es en especial conveniente si se aplica para comprobar la operación de multiplicación, como lo vemos en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} 8713 \\ \underline{\times\ 264} \\ 34852 \\ 52278 \\ \underline{17426} \\ 2300232 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{\times\ 3} \\ 3 \end{array}$$

Si en tal comprobación fuera descubierto un error del resultado, entonces, para determinar precisamente dónde tiene lugar dicho error, se puede verificar por el método del nueve cada producto parcial por separado; y si el error no se encuentra aquí, queda solamente comprobar la adición de los productos parciales.

¿Cómo se puede comprobar la división conforme a este método?. Si tenemos el caso de una división sin residuo, el dividendo se considera como el producto del divisor por el cociente. En el caso de una división con residuos se aprovecha la circunstancia de que dividendo = divisor x cociente + residuo.

Por ejemplo:

$$\text{suma de cifras:}\quad \underbrace{16201387}_{1} : \underbrace{4457}_{2} = \underbrace{3635}_{8} ;\ \text{residuo } \underbrace{192}_{3}$$

$$2 \times 8 + 3 = 19;\quad 1 + 9 = 10;\quad 1 + 0 = 1$$

Cuadro 14

De la "Aritmética" de Magnitski cito una disposición conveniente para la comprobación por el nueve:

Para la Multiplicación:

$$\begin{array}{r} 365 \\ \times\, 24 \\ \hline 1460 \\ 730 \\ \hline 8760 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \times\, 6 \\ \hline 30 \end{array}$$

Para la División

- del cociente 8
- del dividendo 1
- del divisor 2
- del residuo 3

$$2 \times 8 + 3 = 19$$
$$1 + 9 = 10$$
$$1 + 0 = 1$$

Semejante comprobación de las operaciones sin duda no deja que desear en cuanto a rapidez y como comodidad. Pero en lo referente a su seguridad, no es posible señalar lo mismo: el error no es, inevitable en dicho comprobación. En efecto, una y la misma suma de cifras puede tener diferentes números; no solamente la disposición de las cifras, sino algunas veces también la substitución de unas cifras por otras quedan encubierta en dicha comprobación. Escapan también al control los ceros y nueves superfluos, porque ellos no influyen sobre la suma de las cifras. Nuestros antecesores reconocían lo anterior, y no se limitaban a una sola comprobación por medio del nueve, sino que efectuaban inclusive una comprobación complementaria por medio del siete. Este método está basado en la "regla de los residuos", pero no ea tan conveniente como el método del nueve, porque la división entre 7 se tiene que efectuar completamente, para así hallar los residuos (y además son polos errores, en la, operaciones del propio método).

Las dos comprobaciones, por nueve y por siete--, resultan ya un control mucho más seguro: lo que escapa a una, será captado por la otra. El error queda oculto solamente en el caso de que la diferencia entre el resultado verdadero y el obtenido sea el número 7 x 9 = 63 o uno de sus múltiplos. Puesto que semejante casualidad siempre es posible, tampoco la doble verificación proporciona una seguridad total en la veracidad del resultado.

Además, para cálculos ordinarios, donde se yerra frecuentemente en 1 ó 2 unidades, basta con la comprobación por el nueve. La verificación complementaria del siete es demasiado abrumadora. Tengamos en cuenta que solamente es bueno aquel control que no obstaculiza el trabajo.

Sin embargo, efectuando un cálculo importante se procura, con objeto de tener seguridad, realizar una doble corrección, para lo cual, en lugar del divisor 7 es mejor hacer uso del divisor 11. Además, la cuestión se puede simplificar en gran medida, aplicando la siguiente prueba conveniente de la divisibilidad entre 11: el número se descompone en partes, de derecha a izquierda, cada una con dos cifras (la parte izquierda extrema puede incluir sólo una cifra) ; las partes se suman y la suma obtenida será "congruente" con el número examinado conforme al divisor 11: la suma de las partes da en la división entre 11, el mismo residuo que el número examinado.

Aclaremos lo indicado con un ejemplo. Se desea hallar el residuo de la división 24716 entre 11. Descompongamos el número en partes y sumémoslas:

$$2 + 47 + 16 = 65$$

Puesto que 65 en la división entre 11 como residuo da 10, también el número 24716, en la división entre 11, da el mismo residuo. La fundamentación de este método se proporciona en mi libro "Matemáticas Recreativas".
Yo propongo este método porque, simultáneamente, da justo el número congruente con el examinado, también conforme al divisor 9. De esta manera, tenemos la posibilidad de realizar en forma conveniente la comprobación por medio de dos divisores: 9 y 11. A tal comprobación puede escapar solamente un error, múltiple de 99, lo que lo hace muy poco probable.
Volver

2. ¿Multiplicamos Bien?
Los antiguos métodos de multiplicación eran torpes e inadecuados, ¿pero acaso es tan bueno nuestro actual método como para que ya no le sea posible ninguna clase
le mejora posterior? No cabe duda que nuestro método no es perfecto; se pueden inventar todavía más rápidos o aun más seguros. De varias mejoras propuestas indique en tanto, sólo una que aumenta, no la rapidez de la realización de la operación, sino su seguridad; consiste en que, teniendo un multiplicador de varias cifras, se comienza la multiplicación triplicación no con la última cifra, sino con la primera cifra del multiplicador. La multiplicación 8713 × 264, efectuada anteriormente, además adopta la forma:

$$\begin{array}{r}
8713 \\
\underline{\times\, 264} \\
17426 \\
52278 \\
\underline{34852} \\
2300232
\end{array}$$

Como vemos, la última cifra de cada producto parcial se escribe debajo de aquella cifra del multiplicador, por la cual se multiplica.
La ventaja de semejante disposición consiste en que las primeras cifras de los productos parciales , que determinan las cifras más importantes del resultado, se obtienen al principio de la operación, cuando la atención todavía no se pierde y, por consiguiente disminuye la probabilidad de cometer un error. (Además, este método simplifica la aplicación de la llamada multiplicación "abreviada", sobre la cual no podemos extendernos).
Volver

3. Método Ruso de Multiplicación
No se pueden realizar multiplicaciones de números de varias cifras, así sean de dos cifras, si no se recuerdan de memoria todos los resultados de la multiplicación de los dígitos, es decir, lo que es la tabla de multiplicación. En la antigua "Aritmética" de Magnitski, que ya hemos mencionado, la

necesidad de un conocimiento sólido de la tabla de multiplicación está expresada en los versos (extraños para el oído moderno) siguientes[5]:

Aún no ha existido quien,
ignorando las tablas de multiplicación,
quede exento de tropiezos
que finalmente lo derroten
en todas las ciencias.
Y aún más, sí habiéndolas
aprendido las olvida,
no habrá obtenido ningún beneficio.

El autor de estos versos, evidentemente, no sabía o no tomaba en consideración que existe un método de multiplicar números en que no es necesario el conocimiento de la tabla de multiplicar. Este método, que no es semejante a nuestros métodos escolares, fue heredado y empleado corrientemente por el pueblo ruso desde la remota antigüedad. Fundamentalmente consiste en que la multiplicación de dos números cualesquiera, lleva a una serie de divisiones consecutivas de un número por la mitad y, a un duplicamiento del otro número. He aquí un ejemplo:

$$\begin{array}{r} 32 \times 113 \\ 16 \times 26 \\ 8 \times 52 \\ 4 \times 104 \\ 2 \times 208 \\ 1 \times 416 \end{array}$$

La división por la mitad se prosigue hasta que en el cociente se obtenga 1, duplicando paralelamente el otro número. El número último duplicado da precisamente el resultado buscado. No es difícil comprender sobre qué está basado este método: el producto no varia si uno de los factores disminuye a la mitad, y el otro aumenta al doble. Es claro, por tal razón, que en el resultado de la repetición múltiple de esta operación se obtiene el producto buscado:

$$32 \text{ x } 13 = 1 \text{ x } 416$$

Sin embargo ¿cómo proceder cuando se requiera dividir un número impar por la mitad?
El método popular fácilmente sale de esta dificultad.
La regla dice que es necesario, en el caso de un número impar, restarle una unidad y dividir el resto por la mitad; pero en compensación, será necesario sumar el último número de la columna derecha, con todos los números de dicha columna que se hallan en el mismo renglón de un número impar de la columna izquierda: esta suma nos dará el producto buscado. Cuando se lleva a la práctica este método, se acostumbra tachar todos los renglones con números pares a la izquierda, quedando únicamente los renglones que contienen un número impar a la izquierda. Proporcionemos un ejemplo:

[5] Los aludidos verso, se encuentran escritos en ruso antiguo por lo que, para dar al lector una clara idea de su contenido se ha hecho de ellos una traducción libre y equivalente, guardando fidelidad a la idea que expresan.

$$\begin{array}{r} 19 \times 17 \\ 9 \times 34 \\ \cancel{4 \times 68} \\ \cancel{2 \times 136} \\ 1 \times 272 \end{array}$$

Sumando los números no tachados, obtenemos el resultado preciso:

$$17 + 34 + 272 = 323.$$

¿En qué está fundado este método?
La justeza del método se torna evidente, si se toma en cuenta que

$$19 \times 17 = (18 + 1) \times 17 = 18 \times 17 + 17,$$
$$9 \times 34 = (8 + 1) \times 34 = 8 \times 34 + 34, \text{ etc.}$$

Es claro que los números 17, 34, etc., perdidos en la división del número impar por la mitad, se necesitan, sumar al resultado de la última multiplicación, para obtener el producto.
Volver

4. Del País de las Pirámides
Es muy probable que el método anteriormente descrito llegará hasta nosotros desde la más remota antigüedad y de un lejano país: Egipto. Poco sabemos acerca de cómo realizaban las operaciones aritméticas los habitantes del antiguo país de las pirámides, pero se conserva un interesante documento: un papiro donde están escritos ejercicios aritméticos de un alumno de una de las escuelas de agrimensura del Egipto antiguo; es el llamado "Papiro de Rhind que pertenece a una época entre los años 2000 y 1700 antes de nuestra era[6], y que representa, en si, una copia de un manuscrito todavía más antiguo, transcrito por un tal Ajmes. El escriba[7] Ajmes, al encontrar "el cuaderno del escolar" de esta lejanísima época, transcribió cuidadosamente todos los ejercicios aritméticos del futuro agrimensor, incluyendo sus errores y las correciones del profesor, y dió a su copia un título solemne, que ha llegado hasta nosotros en la siguiente forma incompleta:
Precepto para, cómo alcanzar el conocimiento de todas las cosas desconocidas ... de todos los secretos ocultos en las cosas.
Elaborado por el escriba Ajmes durante la época del faraón Ra, para uso del Alto y Bajo Egipto, conforme a los cánones de las obras antiguas del tiempo del faraón "Ra - en - mata ".

El papiro de Rhind terminaba con consejos muy originales:
"Cazadores de reptiles y ratones, hagan fuego contra la mala yerba; cobren abundantes presas. Rueguen al Dios Ra del calor, del viento y de la alta agua".

---

[6] El papiro, encerrado en un estuche metálico, Fue encontrado por el egiptólogo inglés Henry Rhind. En formar desplegada tiene 20 m. de longitud y 30cm. de ancho. Se conserva en el Museo Británico, en Londres.
[7] El título "escriba" pertenecía a la tercera clase de los sacerdotes egipcios; en su administración se encontraba "todo lo referente a la parte constructiva de un templo y a su propiedad agraria". Su especialidad principal, la constituían los conocimientos matemáticos, astronómicos y geográficos (V Bobynin).

Uno de los papiros matemáticos egipcios se encuentra en Moscú, en el Museo de Bellas Artes A. S. Pushkin. El académico B. A. Turaiev lo empezó a descifrar en 1914, tarea concluida por el académico V. V. Struve en el año 1927.

En el, papiro de Rhind, ese interesante documento que ha perdurado cerca de 40 siglos, y que testimonia sobre una antigüedad aún más, remota, encontramos cuatro ejemplos de multiplicación efectuados conforme a un método que hace recordar vivamente al método popular ruso. He aquí estos ejemplos (los puntos delante de los números simbolizan el número de unidades del multiplicador; con el signo +, señalamos los números que están sujetos a la adición):

(8 × 8)
. 8
.. 16
.... 32
:::: 64

(9 × 9)
. 9 +
.. 18
.... 36
:::: 72 +
Total 81

(8 × 365)
. 365
.. 730
.... 1460
:::: 2920

(7 × 2801)
. 2801 +
.. 5602 +
.... 11201 +
Total 19607

Como se ve de estos ejemplos, ya varios milenios antes de nuestra era, los egipcios empleaban un método de multiplicación muy semejante al popular ruso (fig. 24), y que por caminos desconocidos fue trasladado del antiguo país de las pirámides a la época moderna.

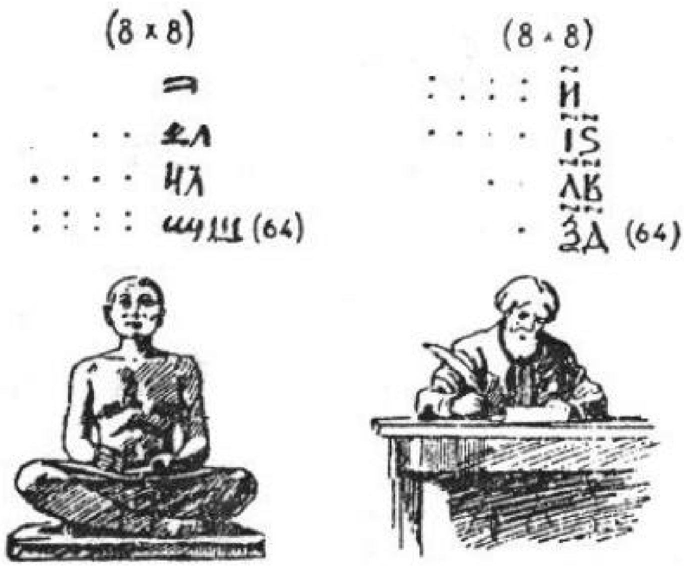


Figura 24. El razonamiento de las operaciones aritméticas llegó a Rusia del antiguo Egipto

Si a un habitante de la tierra de los faraones se le propusiera multiplicar, por ejemplo. 19×17, efectuaría estas operación en la siguiente forma: escribiría una serie de duplicaciones sucesivas del número 17:

$$
\begin{array}{rl}
1 \to 17 & + \\
2 \to 34 & + \\
4 \to 68 & \\
8 \to 136 & \\
16 \to 272 & +
\end{array}
$$

y después sumaría los números que están seguidos por el signo +, es decir, 17 + 34 + 272. Obtendría, finalmente el resultado correcto: 17 + (2 x 17) + (16 x 17) = 19 x 17. Es fácil ver que semejante método, en esencia, es muy afín al popular ruso (la substitución de la multiplicación por una serie de duplicaciones sucesivas).

Es difícil decir si alguno de nuestros campesinos participaron en el traspaso de este antiguo método de multiplicación; los autores ingleses lo denominan precisamente "método campesino ruso"; en Alemania, en alguna parte, aunque los campesinos se aprovechan de él, sin embargo lo llaman "ruso".

Sería sumamente interesante obtener, por parte de los lectores, informaciones sobre lugares donde se emplea hoy día este antiguo método de multiplicación que ha tenido tan largo y original pasado.

En general, se ha seguido con gran atención lo referente a la matemática popular: penetrar en los métodos de cálculo y de medición empleados por el pueblo, recopilar y registrar estas memorias de la creación matemática popular, que han llegado hasta nuestra época desde las profundidades de la más remota antigüedad.

Sobre esto, hace tiempo, llamó la atención el historiador de la matemática, V. V. Bobynin, quien inclusive propuso un breve programa de recopilación de las memorias de la matemática popular. Quizás no esté de más proporcionar aquí la enumeración por él compuesta, para saber con precisión lo que conviene recopilar y registrar:

1. Numeración y cálculo.
2. Métodos de medida y de peso.
3. Conocimientos geométricos y sus expresiones en las edificaciones y ornamentos.
4. Métodos de agrimensora.
5. Problemas populares.
6. Proverbios, enigmas, y en general, producciones de la filología popular que tienen, relación con los conocimientos matemáticos.
7. Memorias de la matemática popular antigua, que se encuentran en manuscritos, museos, colecciones, o hallados en excavaciones de túmulos, tumbas o vestigios de una ciudad.

En resumen, proporcionó una breve información acerca de cuándo aparecieron por vez primera los signos, ahora generalmente empleados, de las operaciones aritméticas, la notación de la fracción, del exponente etc:

+ y –	en los manuscritos de Leonardo da Vinci (1452-1519)
×	en la obra de Guillermo Oughtred (1631)
. y :	en la obra de Godofredo W. Leibniz (1046-1716)
a/b	en la obra de Leonardo Pisano (Fibonacci) (1202)
an	en la obra de Nicolás Chuquet (1484)
=	en la obra de Roberto Recorde (1557)
> y <	en la obra de Tomás Harriot (1631)
() y []	en la obra de Alberto Girard (1629)

Si el lector está interesado en profundizar sobre la historia de la aritmética, conviene que consulte el libro de V. Belustino "Cómo llegó la gente gradualmente hasta la aritmética actual" (1914), que puede ser encontrado en las bibliotecas o librerías de libros antiguos.

5. Curiosidades Aritméticas

$$100 = 123 + 45 - 67 + 8 - 9$$
$$100 = 123 - 45 - 67 + 89$$
$$100 = (1 + 2 - 3 - 4) \times (5 - 6 - 7 - 8 - 9)$$

Volver

Capítulo Cuarto
SISTEMAS NO-DECIMALES DE NUMERACION

Contenido:

1. Autobiografía enigmática

Me permito iniciar este capítulo con un problema que yo imaginé hace tiempo para los lectores de una antigua revista de gran difusión[1], en calidad de "problema con premio". Helo aquí:

En los papeles de un matemático original fue hallada su autobiografía. Esta empezaba con las siguientes líneas:
"Acabé el curso de la universidad a los 44 años de edad. Pasó un año y siendo un joven de 100 años, me casé con una muchacha de 34 años".
"La insignificante diferencia de edades, sólo 11 años- que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 10 niños. Yo obtenía en total, al mes, 200 rublos, de los cuales, 1/10 parte se consagraba a mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 130 rublos al mes", y así sucesivamente.

¿Qué aclara las extraña contradicciones en los números de este fragmento?
La resolución del problema se sugiere por el nombre de este capítulo: un sistema no decimal de numeración; he aquí la causa singular, de las aparentes contradicciones de los números citados. Procediendo sobre la base de este pensamiento, no es difícil darse cuenta del sistema de numeración en que están representados los números del original matemático. El secreto se releva por la frase: "después de un año (luego de los 44 años de edad) como un hombre joven de 100 años"...; si a partir de la adición de una unidad el número 44 se transforma en 100, significa que la cifra 4 es la mayor en este sistema (como el 9 lo es en el decimal), y por consiguiente, la base del sistema es el 5. Al excéntrico matemático se le ocurrió la fantasía de escribir todos los números de su biografía en el sistema quinario[2] de numeración, es decir, aquel en el cual la unidad de un orden superior no es 10 veces, sino 5 veces mayor que la unidad de un orden inmediato inferior: en el primer lugar de la derecha se hallan, en él, las unidades simples (no mayores que el cuatro), en el segundo, no las decenas, sino las "quinarias"; en el tercero no las centenas, sino las "vigesimoquinarias" y así sucesivamente. Por tal razón, el número "44" representado en el texto de la escritura denota, no 4 x 10 + 4, como en el sistema decimal sino 4 x 5 + 4, es decir, veinticuatro. En la misma forma, el número "100" en la autobiografía representa una unidad de tercer orden en el sistema quinario, es decir, 25. Los restantes números de la escritura denotan correspondientemente[3]:

[1] "La naturaleza y los hombres".
[2] El sistema quinario de numeración tiene cinco cifras básicas (0,1,2,3, y 4) y se caracteriza porque el número 5 es ya un número de dos cifras, que se representa por, la unidad en el orden de las "quinarias" y, el cero en el orden de las unidades, (N. del T.)
[3] De aquí en adelante, los números escritos en un sistema no decimal de numeración se ponen entre comillas.

"34"	$= 3 \times 5 + 4$	$= 19$
"11"	$= 5 + 1$	$= 6$
"200"	$= 2 \times 25$	$= 50$
"10"	$= 5$	$= 5$
"1/10"	$= 1/5$	$= 1/5$
"1.130"	$= 25 + 3 * 5$	$= 40$

Restituyendo el significado verdadero de los números de la escritura, vemos que en ellos no existen contradicciones de ningún tipo.
"Acabé mis estudios en la universidad a los 24 años. Después de un año, siendo un joven de 25 años, me casé con una muchacha de 19 años. La insignificante diferencia de edades, 6 años, que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 5 niños. De salario percibía en total, al mes, 50 rublos, de los cuales 1/5 parte la empleaba mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 40 rublos al mes".

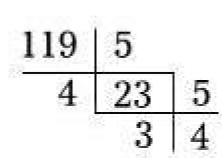
¿Es difícil representar los números en otros sistemas de numeración? En absoluto. Supongamos que se desea representar el número 119 en el sistema quinario. Se divide 119 entre 5, para saber cuántas unidades de primer orden caben en él:

$$119 : 5 = 23, \text{ residuo } 4.$$

Lo que significa que el número de unidades simples será 4. Además, 23 "quinarias" no pueden estar totalmente en el segundo orden, puesto que la cifra mayor en el sistema quinario es el cuatro, y unidades más grandes que cuatro no pueden existir en un solo orden. Luego, dividamos 23 entre 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ residuo } 3.$$

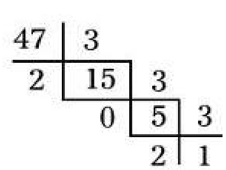
Esto muestra que en el segundo orden ("de los cincos") estará la cifra 3, y en el tercero ("de los veinticincos") el 4.
Así, $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$, o, en el sistema quinario "434".
Las operaciones realizadas, para comodidad, se disponen en la forma siguiente:



Cuadro 16

Las cifras en negritas (en la escritura se las puede subrayar) se escriben de derecha a izquierda y, simultáneamente, se obtiene la representación buscada, del número en otro sistema.
Pongamos aún otros ejemplos:

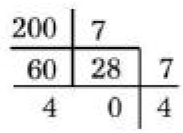
Ejemplo 1: Representar 47 en el sistema ternario.
Resolución:



Cuadro 17

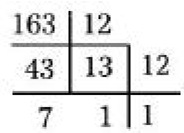
Respuesta: "1202".
Verificación: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$.

Ejemplo 2: Representar 200 en el sistema septenario.
Resolución:


Cuadro 18

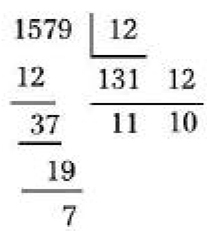
Respuesta: "404".
Verificación: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$,

Ejemplo 3: Representar el número 163 en el sistema duodecimal:
Resolución:


Cuadro 19

Respuesta: "117".
Verificación: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Ahora el lector no tiene dificultad en representar cualquier número en un sistema de numeración deseado. El único obstáculo puede surgir, solamente, a consecuencia de que en ciertos casos no se encontraran notaciones para las cifras. En efecto, en la representación de números en sistemas con una base mayor que diez, por ejemplo, en el duodecimal puede presentar la necesidad en las cifras "diez" y "once". Fácilmente se sale de esta dificultad eligiendo, para las nuevas cifras, cualesquiera signos o letras condicionales, por ejemplo, las letras K y L que se hallan en los lugares 10° y 11° en el alfabeto ruso[4]. Así, el número 1579 en el sistema duodecimal[5] se representa en la forma siguiente:


Cuadro 20

Respuesta: "(10) (11)7", o IJ7 (según el alfabeto castellano).
Verificación: $10 \times 149 + 11 \times 12 + 7 = 1579$.

* * *

[4] En el alfabeto español, los lugares 10º y 11º estás ocupados por las letras I y J. (N. del T.)
[5] En el sistema duodecimal las cifras básicas con: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9, 10 y 11. Por lo tanto, es necesario introducir dos nuevos símbolos para denotar las "cifras" diez y once. (N. del T).

Problema 1: Escribir el número 1926 en el sistema duodecimal.[6]
Problema 2: Escribir el número 273 en el sistema duodecimal.
Volver

2. El sistema de numeración más sencillo.

Sin trabajo podemos notar que, en cada sistema, la mayor cifra que se utiliza es menor en una unidad que el número base del sistema. Así, en el sistema decimal, la mayor cifra es el 9; en el de base 6, el 5; en el ternario, el 2; en el de base l5, el 14, etc.

El sistema de numeración más sencillo es, naturalmente, aquel para el cual se requiere el menor número de cifras. En el sistema decimal son necesarias 10 cifras (considerando, también, al cero), en el quinario, 5 cifras, en e1 ternario, 3 cifras (0, 1 y 2), en el binario únicamente 2 cifras (1 y 0). ¿Existe un sistema "unitario"? Naturalmente: este sistema es aquel en el cual las unidades de todos los órdenes tienen idéntico valor. Este mismo "sistema" rudimentario lo empleaba el hombre primitivo, efectuando cortes en un árbol de acuerdo a1 número de objetos contados. Pero entre él y todos los otros sistemas de cálculo existe una enorme diferencia: carece de la principal ventaja de nuestra numeración (el llamado, valor posicional de las cifras). En efecto, en el sistema "unitario" un signo que se halle en el 3° ó 5° lugares, tiene el mismo valor que el que se encuentre en el primer lugar. Mientras que, aún en el sistema binario, la unidad en el 3^er^, lugar (desde la derecha) es ya 4 (2×2) veces mayor que en el 1^er^. lugar, y en el 5° lugar, 16 veces ($2 \times 2 \times 2 \times 2$) mayor. Para la representación de cualquier número en el sistema "unitario" son necesarios exactamente tantos signos, como objetos sean contados: para escribir cien objetos, son necesarios cien signos: en el binario solamente siete ("1100100"); en el quinario, en total, tres ("400").

Es por esto que al sistema "unitario" es muy dudoso que se le pueda llamar "sistema"; por lo menos, no se le puede colocar junto a los restantes, puesto que se distingue fundamentalmente de ellos, en que no proporciona ninguna economía en la representación de los números. Si se le hace a un lado, entonces el sistema más sencillo de numeración resulta ser el sistema binario, en el que se emplean, en total, dos cifras: 1 y 0. ¡Por medio de la unidad y del cero se puede representar todo un conjunto infinito de números!

Para una numeración escrita y fija, este sistema es poco conveniente: se obtienen números excesivamente largos[7]. El sistema binario es muy a adecuado en una serie de investigaciones teóricas. En los últimos tiempos el papel del sistema binario ha tornado gran preponderancia, puesto que se halla en la base de la producción de cálculo, en las máquinas computadoras electrónicas. Dicho sistema posee ciertas interesantes particularidades inherentes que a propósito, se pueden emplear para la realización de una serie de trucos matemáticos efectivos, sobre los cuales hablaremos detalladamente en el capítulo "Trucos sin engaño".

Nos hemos habituado a tal grado a las operaciones aritméticas, que las efectuamos automáticamente, casi sin reflexionar en lo que hacemos. Pero las mismas operaciones exigen de nosotros gran esfuerzo si deseamos aplicarlas a números escritos en un sistema no decimal.

Probemos, por ejemplo, efectuar la adición de los dos siguientes números, escritas conforme al sistema quinario.

$$\begin{array}{r} \text{"4203"} \\ +\text{"2132"} \\ \hline \end{array}$$

[6] Las respuestas a los problemas están al final del libro. E indica: Resultado Problema 1: "1146"; Resultado Problema 2: "1109"

[7] En cambio como veremos después para tal sistema se simplifican al máximo las tablas de adición, de multiplicación.

Sumemos conforme a los órdenes, empezando con las unidades, es decir, de la derecha: 3 + 2 es igual a cinco; pero no podemos escribir 5, porque tal cifra no existe en el sistema quinario; el cinco es ya una unidad de orden superior. Es decir, en la suma no hay unidades; escribimos 0, y el cinco, o sea, la unidad del siguiente orden, lo conservamos en la mente. Además, 0 + 3 = 3, más la unidad conservada en la mente, nos da en total 4 unidades de segundo orden. En el tercer orden obtenemos 2 + 1 = 3. En el cuarto, 4 + 2 es igual a seis, es decir, 5 + 1; escribimos 1, y al 5, o sea la unidad del orden superior- lo trasladamos más a la izquierda. La suma buscada = "11340":

$$\begin{array}{r} \text{"4203"} \\ +\text{"2132"} \\ \hline \text{"11340"} \end{array}$$

Damos al lector la posibilidad de comprobar esta adición, trasladando, previamente, los números entre comillas al sistema decimal.
Exactamente igual se realizan también las otras operaciones. Como ejercicios, ofrecemos aún una serie de problemas[8] , cuyo número el lector puede aumentar por su cuenta, a voluntad:
En el sistema quinario:
Problema 3:

$$\begin{array}{r} \text{"2143"} \\ -\text{"334"} \\ \hline \end{array}$$

Problema 4:

$$\begin{array}{r} \text{"213"} \\ \times\text{"3"} \\ \hline \end{array}$$

Problema 5:

$$\begin{array}{r} \text{"42"} \\ \times\text{"31"} \\ \hline \end{array}$$

En el sistema ternario:

Problema 6:

$$\begin{array}{r} \text{"212"} \\ +\text{"120"} \\ \hline \end{array}$$

Problema 7:

$$\begin{array}{r} \text{"122"} \\ \times\text{"20"} \\ \hline \end{array}$$

Problema 8:

[8] Las respuestas a los problemas se encuentran al final del libro.
Resultados:
Problema 3.-"1304".
Problema 4.- "1144".
Problema 5.-"2402".
Problema 6.-"2010".
Problema 7.-"10210".
Problema 8.-"110".
Problema 9.-"10" residuo "11".

$$\begin{array}{r} "220" \\ \div "2" \\ \hline \end{array}$$

Problema 9:

$$\begin{array}{r} "201" \\ \div "12" \\ \hline \end{array}$$

En la realización de esa, operaciones, primero representamos mentalmente en nuestro familiar sistema decimal a los números escrito, y obtenido el resultado, de nuevo los representamos en el sistema no decimal deseado. Pero también se puede proceder en otra forma: constituir "la tabla de adición" y "la tabla de multiplicación" en aquellos sistemas en los que estén dados los números, y emplear directamente las tablas.

Por ejemplo, la tabla de adición en el sistema quinario tiene la siguiente forma:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Por medio de esta tabla podemos sumar los números "4203" y "2132", escritos en el sistema quinario, esforzando la atención mucho menos que con el método aplicado anteriormente.

Como es fácil comprender, la realización de la substracción también se simplifica.

Formemos la tabla de multiplicar ("pitagórica") para el sistema quinario:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Teniendo esta tabla ante los ojos, se puede reducir, en sí, el trabajo de la multiplicación (y de la división) de los números en el sistema quinario, como es fácil persuadirse, aplicándola a los arriba. Por ejemplo, en la multiplicación.

$$\begin{array}{r} "213" \\ \times "3" \\ \hline 1144 \end{array}$$

Razonamos así: tres por tres (de la tabla) da "14", escribimos 4 y conservamos en la mente el uno para el siguiente orden. Tres por uno, tres, mas uno del orden anterior, 4; de la tabla, 3×2 da "11", con lo que el resultado final será "1144".

Cuanto menor es la base de un sistema, tanto menores son, también, las correspondientes tablas de adición y de multiplicación. Por ejemplo, las dos tablas para el sistema ternario son:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Tabla de la adición para el sistema ternario

1	2
2	11

Tabla pitagórica para el sistema ternario

Dichas tablas se pueden, simultáneamente, memorizar y emplear para la realización de las operaciones. Las tablas de adición y multiplicación más breves corresponden al sistema binario.

0	1
1	10

Tabla de la adición para el sistema binario

$$\boxed{1 \times 1 = 1}$$

Tabla de multiplicación para el sistema binario

¡Por medio de "tablas" tan sencillas se pueden efectuar, en el sistema binario, las cuatro operaciones! Las multiplicaciones en este sistema, como tales, en esencia no existen, pues multiplicar por la unidad equivale a dejar el número sin modificación; La multiplicación por "10", "100", "1000" (es decir, por 2, por 4, por 8) conduce a un sencillo agregado, a la derecha del correspondiente número de ceros. Por lo que toca a la adición, para su realización, es necesario recordar solamente que, en el sistema binario, 1 + 1 = 10.
¿No es cierto que nosotros, con una fundamentación completa, llamamos anteriormente al sistema binario el más sencillo de todos los posibles? La gran longitud de los números de esta aritmética singular, se compensa por la sencillez; de realización de todas las operaciones aritméticas con ellos. Se desea, por ejemplo, multiplicar

$$\begin{array}{r}
\text{"1001011101"} \\
\times\text{"100101"} \\
\hline
\text{"1001011101"} \\
+\text{"1001011101"}\cdot\cdot \\
\text{"1001011101"}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
\hline
\text{"101011101110001"}
\end{array}$$

La realización, de la operación conduce únicamente a una transcripción de los números dados en una disposición ordenada: esto requiere esfuerzos mentales comparativamente menores que la multiplicación de tales números, en el sistema decimal (605 × 37 = 22 385). Si fuera adaptado por nosotros el sistema binario, el estudio de la numeración escrita requeriría una mínima tensión mental (a cambio de una máxima cantidad de papel y tinta). Sin embargo, en la numeración oral la aritmética binaria, por lo que se refiere a la comodidad de realización de las operaciones, cede en gran medida, ante nuestro decimal.
Proporcionemos también un ejemplo de la operación de división efectuada en el sistema de numeración binario:

$$\begin{array}{rl}
10000010 & :111 \quad = 10010 \\
111\cdots\cdots\cdot & \\
\hline
1001\cdots\cdot & \\
111\cdots\cdot & \\
\hline
100 &
\end{array}$$